

# Ceq(m)Unc

par Ceqmas

# Guide d'utilisateur v3.0

## Guide d'utilisateur v3.0

1. Avant-propos
2. Fonctionnalité
3. Bases théoriques de l'incertitude de mesure
  - 3.1. Quelques définitions
    - 3.1.1. Sur l'exactitude de mesure extraites de ISO 5725-1
    - 3.1.2. Sur des concepts liés à l'incertitude de mesure extraites du Guide
    - 3.1.3. Sur l'incertitude de mesure extraites du Guide
  - 3.2. Conséquences de ces définition au sujet de l'incertitude de mesure
  - 3.3. L'importance d'un théorème statistique
  - 3.4. Evaluation de l'incertitude-type
    - 3.4.1. Evaluation de Type A de l'incertitude-type
    - 3.4.2. Evaluation de Type B de l'incertitude-type
  - 3.5. Détermination de l'incertitude-type composée
4. Structure du logiciel
5. Architecture générale
6. Survol des différentes feuilles de travail
7. Liste des différentes macro instructions
8. Convention
9. Principes du calcul
10. Mise en application du logiciel
  - 10.1. Définition de la relation fonctionnelle
  - 10.2. Inscription du mesurande et des grandeurs d'influence
  - 10.3. Activation des fonctions dérivées

- 10.4. Définition des incertitudes-types individuelles
- 10.5. Définition des valeurs des grandeurs d'influence
- 10.6. Lecture de l'incertitude composée
- 10.7. Estimation des effets du second ordre
- 10.8. Rédaction des commentaires
- 10.9. Rapport de synthèse
11. Etude de sensibilité
  - 11.1. Effet des incréments de calcul des dérivées partielles pour le premier ordre
  - 11.2. Effet de la valeur de la fonctionnelle au point de fonctionnement
12. Indication importante
13. Information sur le temps de calcul
14. Informations complémentaires
15. Annexe 1, Diaporama sur l'incertitude de mesure
16. Annexe 2, Exemple H1 (Annexe H du Guide d'expression de l'incertitude)
17. Annexe 3, Séquences de manipulation du logiciel

## 1. Avant-propos

**Ceq(m)Unc** fait partie d'une suite de logiciels conçus, développés et, le cas échéant, commercialisés par CEQMAS scs dans les domaines suivants :

- quantification des performances structurales de produits de construction (Ceq(m)En40, Ceq(m)En12899),
- évaluation des contraintes mécaniques et thermiques dans des composants (CeqDuct, CeqTherms),
- approche mathématique de reconstitution d'accidents routiers (Ceq(m)Arc),
- impact métallurgique du soudage des aciers (CeqCrack, CeqHard),
- sélection des aciers en fonction du risque de rupture fragile (CeqSel),
- conditions environnementales (ensoleillement, acoustique, teneur en CO<sub>2</sub> de l'air) dans l'habitat (CeqSun, CeqSound, CeqCO<sub>2</sub>),
- critères de tenue à la fatigue (CeqDvan).

Ces logiciels sont identifiés par le préfixe adaptatif « **Ceq(m)** », soit pour le présent logiciel le sigle graphique **Ceq(m)Unc** prononçable indifféremment selon les deux options : **Ceq(m)Unc** ou **CeqUnc**.

**Ceq(m)Unc** est écrit en langue française.

## 2. Fonctionnalité

**Ceq(m)Unc** est conçu selon la prénorme européenne ENV 13005 de Mai 1999 intégrant le « Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure ». Ce document, destiné à toutes les personnes concernées par la mesure, contribue à une information complète sur la manière d'aboutir à l'expression de l'incertitude de mesure et fournit une base pour la comparaison des résultats de mesure.

Le présent manuel d'utilisation décrit les spécificités du logiciel et les instructions d'usage.

Il présume, de la part de son utilisateur, une connaissance du Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure. A cette fin et dans le cadre de la licence concédée à l'utilisateur et pour l'information exclusive de celui-ci, une copie informatique du guide est disponible sur le Cd-rom du logiciel.

**Ceq(m)Unc** assure une évaluation de l'incertitude-type composée selon la loi de propagation de l'incertitude de mesure à partir du développement en série de Taylor au second ordre de la relation fonctionnelle liant le mesurande aux grandeurs d'influence.

Ce type d'évaluation offre l'avantage d'inventorier les différentes sources d'incertitude à partir d'une identification des grandeurs d'influence et d'offrir une pondération des diverses contributions. Il permet aussi de quantifier l'incertitude dans le cas de mesures spécifiques ou dédiées, qui par conséquent sont en nombre trop limité que pour envisager l'application d'une approche purement statistique de la dispersion du seul mesurande.

Ce mode d'évaluation requiert malheureusement la réalisation d'opérations mathématiques assez complexes et de nombreux calculs fastidieux liée respectivement à la formulation des différentes dérivées partielles et des contributions au bilan d'incertitude.

**Ceq(m)Unc** libère son utilisateur de cette contrainte et des sources d'erreurs inhérentes en automatisant tous les calculs et opérations mathématiques. A cette fin, les dérivées partielles de la relation fonctionnelle définissant le mesurande à partir des variables d'influence sont quantifiées par différences finies.

A partir de sa version 2, **Ceq(m)Unc** a privilégié une approche originale permettant d'appréhender automatiquement les effets du second ordre sur l'incertitude de mesure. Ces effets du second ordre sont mentionnés dans le Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure et leur estimation est mise en évidence dans un exemple de métrologie dimensionnelle.

### 3. Bases théoriques de l'incertitude de mesure

Le concept d'incertitude de mesure ne peut être isolé de celui relatif à l'exactitude de mesure traitée notamment dans la série de normes internationales ISO 5725 et notamment la partie 1 : ISO 5725-1: 1994<sup>1</sup>.

Il paraît dès lors essentiel de dégager d'abord dans le cadre de ce manuel quelques définitions clés issues soit de la norme soit du Guide.

Ensuite, les bases théoriques de détermination de l'incertitude de mesure sont présentées de manière synthétique à partir d'extraits du Guide, lequel sera consulté directement par le lecteur de toute manière.

#### 3.1. Quelques définitions

##### 3.1.1. Sur l'exactitude de mesure extraites de ISO 5725-1

###### **Exactitude**

Étroitesse de l'accord entre le résultat d'essai et la valeur de référence acceptée.

Le terme «exactitude» appliqué à un ensemble de résultats d'essai implique une combinaison de composantes aléatoires et d'une erreur systématique commune ou d'une composante de biais.

###### **Justesse**

Étroitesse de l'accord entre la valeur moyenne obtenue à partir d'une large série de résultats d'essais et une valeur de référence acceptée.

La mesure de la justesse est généralement exprimée en termes de biais.

La justesse a été également appelée « exactitude de la moyenne ». Cet usage n'est pas recommandé.

###### **Biais**

Différence entre l'espérance mathématique des résultats d'essai et une valeur de référence acceptée.

Le biais est l'erreur systématique totale par opposition à l'erreur aléatoire. Il peut y avoir une ou plusieurs composantes d'erreur systématique qui contribuent au biais. Une différence systématique plus importante par rapport à la valeur de référence acceptée est reflétée par une plus grande valeur du biais.

---

<sup>1</sup> Exactitude (justesse et fidélité) des résultats et méthodes de mesure - Partie 1: Principes généraux et définitions

### **Fidélité**

Étroitesse d'accord entre des résultats d'essai indépendants obtenus sous des conditions stipulées. La fidélité dépend uniquement de la distribution des erreurs aléatoires et n'a aucune relation avec la valeur vraie ou spécifiée.

La mesure de fidélité est exprimée en termes d'infidélité et est calculée à partir de l'écart-type des résultats d'essais. Une fidélité moindre est reflétée par un plus grand écart-type.

Le terme «résultats d'essai indépendants» signifie des résultats obtenus d'une façon non influencée par un résultat précédent sur le même matériau d'essai ou similaire. Les mesures quantitatives de la fidélité dépendent de façon critique des conditions stipulées. Les conditions de répétabilité et de reproductibilité sont des ensembles particuliers de conditions extrêmes.

### **Répétabilité**

Fidélité sous des conditions de répétabilité.

#### **Conditions de répétabilité**

Conditions où les résultats d'essai indépendants sont obtenus par la même méthode sur des individus d'essai identiques dans le même laboratoire, par le même opérateur, utilisant le même équipement et pendant un court intervalle de temps.

#### **Écart-type de répétabilité**

Écart-type des résultats d'essai obtenus sous des conditions de répétabilité.

C'est une mesure de la dispersion de la loi de distribution des résultats d'essai sous des conditions de répétabilité. On peut définir de façon similaire la «variance de répétabilité» et le «coefficient de variation de la répétabilité» et les utiliser comme mesures de la dispersion des résultats d'essai sous des conditions de répétabilité.

### **Reproductibilité**

Fidélité sous des conditions de reproductibilité.

#### **Conditions de reproductibilité**

Conditions où les résultats d'essai sont obtenus par la même méthode sur des individus d'essais identiques dans différents laboratoires, avec différents opérateurs et utilisant des équipements différents.

#### **Écart-type de reproductibilité**

Écart-type des résultats d'essai obtenus sous des conditions de reproductibilité.

C'est une mesure de dispersion de la loi de distribution des résultats d'essai sous des conditions de reproductibilité. On peut définir de façon similaire la «variance de reproductibilité» et le «coefficient de variation de reproductibilité» et les utiliser comme mesure de la dispersion des résultats d'essai sous des conditions de reproductibilité.

### **Valeur aberrante**

Élément d'un ensemble de valeurs qui est incohérent avec les autres éléments de cet ensemble.

L'ISO 5725-2 spécifie les tests statistiques et le niveau de signification à utiliser pour identifier les valeurs aberrantes dans les expériences de justesse et de fidélité.

## **3.1.2. Sur des concepts liés à l'incertitude de mesure extraites du Guide**

### **Grandeur (mesurable)**

Attribut d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, qui est susceptible d'être distingué qualitativement et déterminé quantitativement

Le terme "grandeur" peut se rapporter à une grandeur dans un sens général (longueur, temps, masse, ...) ou à une grandeur particulière (longueur d'une tige donnée, ...).

### **Valeur (d'une grandeur)**

Expression quantitative d'une grandeur particulière, généralement sous la forme d'une unité de mesure multipliée par un nombre (longueur d'une tige : 5,34 m ou 534 cm).

### **Valeur vraie (d'une grandeur)**

Valeur compatible avec la définition d'une grandeur particulière donnée.

C'est une valeur que l'on obtiendrait par un mesurage parfait. Toute valeur vraie est par nature indéterminée.

Le terme "valeur vraie" n'est en fait pas utilisé dans le Guide et remplacé par le terme "valeur d'un mesurande" considéré comme équivalent.

**Valeur conventionnellement vraie (d'une grandeur)**

Valeur attribuée à une grandeur particulière et reconnue, parfois par convention, comme la représentant avec une incertitude appropriée pour un usage donné.

La valeur conventionnellement vraie est quelquefois appelée valeur assignée, meilleure estimation de la valeur, valeur convenue ou valeur de référence. On utilise souvent un grand nombre de résultats de mesures d'une grandeur pour établir une valeur conventionnellement vraie.

**Mesurage**

Ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur.

**Mesurande**

Grandeur particulière soumise à mesurage.

Exemple : pression de vapeur d'un échantillon donné d'eau à 20 °C. La définition du mesurande peut ainsi nécessiter des indications relatives à des grandeurs telles que le temps, la température et la pression.

**Grandeur d'influence**

Grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage

Exemple : température d'un micromètre lors de la mesure d'une longueur. La définition de la grandeur d'influence doit se comprendre comme incluant les valeurs associées aux étalons, aux matériaux de référence, et aux données de référence, valeurs dont peut dépendre le résultat d'un mesurage, aussi bien que les phénomènes tels que les fluctuations à court terme de l'instrument de mesure et les grandeurs telles que la température ambiante, la pression atmosphérique et l'humidité.

**Résultat d'un mesurage**

Valeur attribuée à un mesurande, obtenue par mesurage.

Lorsqu'on donne un résultat, on indiquera clairement si l'on se réfère à l'indication, au résultat brut, au résultat corrigé et si cela comporte une moyenne obtenue à partir de plusieurs valeurs. Une expression complète du résultat d'un mesurage comprend des informations sur l'incertitude de mesure.

**Résultat brut (corrigé)**

Résultat d'un mesurage avant (après) correction de l'erreur systématique.

**Erreur (de mesure)**

Résultat d'un mesurage moins une valeur vraie du mesurande.

Etant donné qu'une valeur vraie ne peut pas être déterminée, dans la pratique on utilise une valeur conventionnellement vraie.

**Erreur aléatoire**

Résultat d'un mesurage moins la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité

**Erreur systématique**

Moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité, moins une valeur vraie du mesurande.

L'erreur sur le résultat d'un mesurage peut souvent être considérée comme provenant d'un certain nombre d'effets systématiques et aléatoires qui contribuent aux composantes individuelles de l'erreur sur le résultat.

### 3.1.3. Sur l'incertitude de mesure extraites du Guide

**Incertitude (de mesure)**

Paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande

Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type (ou un multiple de celui-ci) ou la demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé.

**Incertitude-type**

Incertitude du résultat d'un mesurage exprimée sous la forme d'un écart-type

**Evaluation de Type A (de l'incertitude)**

Méthode d'évaluation de l'incertitude par l'analyse statistique de séries d'observations

**Evaluation de Type B (de l'incertitude)**

Méthode d'évaluation de l'incertitude par des moyens autres que l'analyse statistique de séries d'observations

**Incertitude-type composée**

Incertitude-type du résultat d'un mesurage, lorsque ce résultat est obtenu à partir des valeurs d'autres grandeurs, égale à la racine carrée d'une somme de termes, ces termes étant les variances ou covariances de ces autres grandeurs, pondérées selon la variation du résultat de mesure en fonction de celle de ces grandeurs

**Incertitude élargie**

Grandeur définissant un intervalle, autour du résultat d'un mesurage, dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande.

La fraction peut être considérée comme la probabilité ou le niveau de confiance de l'intervalle.

L'association d'un niveau de confiance spécifique à l'intervalle défini par l'incertitude élargie nécessite des hypothèses explicites ou implicites sur la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure et son incertitude-type composée. Le niveau de confiance qui peut être attribué à cet intervalle ne peut être connu qu'avec la même validité que celle qui se rattache à ces hypothèses.

**Facteur d'élargissement**

Facteur numérique utilisé comme multiplicateur de l'incertitude-type composée pour obtenir l'incertitude élargie

Un facteur d'élargissement  $k$  a sa valeur typiquement comprise entre 2 et 3.

**3.2. Conséquences de ces définition au sujet de l'incertitude de mesure**

L'incertitude de mesure doit obligatoirement être associée à la valeur jugée la plus vraie du mesurande, en l'occurrence celle :

- résultant de chaque résultat brut amputé de toutes ses erreurs systématiques pour aboutir à un résultat corrigé,
- résultat corrigé le cas échéant réitéré pour réduire la portée des erreurs aléatoires sur une valeur moyenne moins dispersée<sup>2</sup>.

Les notions d'erreurs systématiques ou aléatoires ne sont, à notre sens, ni absolues ni figées. Ainsi, à l'égard des fluctuations de température dans un laboratoire susceptibles d'influencer un essai et répondant généralement à une loi statistique cyclique<sup>3</sup>, les différents politiques peuvent être appliquées :

- considérer l'écart-type équivalent de fluctuation cyclique affectant celle-ci durant une journée complète de 24 heures (par exemple 2 °C) et la valeur moyenne associée (par exemple 21 °C),
- considérer l'écart-type équivalent de fluctuation cyclique affectant celle-ci durant une journée complète de travail de 8 h à 17 h (par exemple 1 °C) et la valeur moyenne associée (par exemple 22 °C),
- considérer l'écart-type équivalent de fluctuation cyclique affectant la durée totale d'un essai (par exemple 10 minutes et 0.1 °C) et la valeur moyenne associée à cette durée (par exemple 22.3 °C).

---

<sup>2</sup>  $n$  mesurages affectés chacun d'une dispersion caractérisée par un écart-type «  $s$  » définissent en effet une moyenne affectée d'une dispersion selon  $s / \sqrt{n}$ .

<sup>3</sup> en sinus du temps sur 24 heures, le cas échéant encore affectée par des cycles saisonniers et en fonction bien sûr du niveau de performance de la climatisation éventuelle.

Le choix de chacune de ces stratégies dépend en premier lieu de la sensibilité du mesurande à la grandeur d'influence. Chacune d'entre elles conduira à définir une correction éventuelle du résultat par rapport à la valeur de référence de la grandeur d'influence et à affecter ce résultat d'une incertitude liée à la valeur particulière de la dispersion de cette grandeur d'influence.

Lorsqu'il exprime une incertitude de mesure, tout laboratoire devrait intégrer le concept de reproductibilité de ses résultats et ne pas se limiter à un concept de répétabilité élargie à ses diverses machines, opérateurs et moments d'exécution des essais, à moins :

- soit d'être sûr d'être centré sur la valeur « vraie » qui serait obtenue à partir d'essais entre laboratoires bien définis au niveau de leurs modalités d'exécution<sup>4</sup>,
- soit d'être sûr d'annoncer une valeur « vraie » et d'avoir sous contrôle les corrections permettant de raccrocher les propres résultats à ceux d'autres laboratoires moins performants (corrections sur la valeur du mesurande ou sur son incertitude).

### 3.3. L'importance d'un théorème statistique

L'incertitude de mesure est souvent exprimée à partir d'un écart-type (incertitude-type) ou d'un multiple « k » d'un écart-type (incertitude élargie, avec par exemple  $k = 2$ ), la dispersion étant basée sur la loi normale.

Cependant de nombreuses fluctuations des grandeurs d'influence ne répondent à cette loi normale mais par exemple à une loi cyclique (température) ou uniforme (résolution d'un instrument de mesure).

La réponse à cette question est apportée par le « théorème central limite ».

Si la valeur du mesurande est constituée par une somme pondérée de grandeurs d'influence

$$(Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_NX_N)$$

et si tous les  $X_i$  sont caractérisés par des lois normales, la loi convoluée résultante de Y sera aussi normale. Il est souvent possible, cependant, de faire l'approximation d'une loi normale pour Y, même si les lois de  $X_i$  ne sont pas normales, en raison du théorème central limite. Ce théorème énonce que la loi de Y sera approximativement normale si les  $X_i$  sont indépendants et si la variance de Y est beaucoup plus grande que celle de toute composante pour un  $X_i$  dont la loi n'est pas normale.

Le théorème central limite a une grande portée parce qu'il montre le rôle très important joué par les variances des lois de probabilité des grandeurs d'entrée par rapport au rôle des moments plus élevés de ces lois, pour la détermination de la forme de la loi convoluée résultante de Y. Il implique en outre que la loi convoluée converge vers une loi normale avec l'augmentation du nombre des grandeurs d'entrée qui contribuent à la variance globale.

### 3.4. Evaluation de l'incertitude-type

Dans de nombreux cas, un mesurande Y n'est pas mesuré directement mais il est déterminé à partir de N autres grandeurs  $X_1, X_2, \dots, X_N$  à travers une relation fonctionnelle f :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Les grandeurs d'entrée  $X_1 \dots X_N$  dont dépend la grandeur de sortie Y peuvent elles-mêmes être envisagées comme mesurandes et peuvent elles-mêmes dépendre d'autres grandeurs, y compris les corrections et facteurs de correction pour les effets systématiques. Selon les cas, elles aboutissent à une relation fonctionnelle compliquée ou au contraire très simple.

Ces valeurs d'entrée et leurs incertitudes peuvent être obtenues :

---

<sup>4</sup> La notion de définition correcte et précise des essais entre laboratoires suscite, à notre sens, de nombreux perfectionnements par rapport aux pratiques encore souvent rencontrées de nos jours.

- à partir d'observations (unique ou répétées) ou par un jugement fondé sur l'expérience pouvant impliquer la détermination de corrections (lectures d'instruments, grandeurs d'influence telles que température ambiante, pression atmosphérique, humidité).
- à partir de sources extérieures, telles que les grandeurs associées à des étalons, à des matériaux de référence certifiés et à des valeurs de référence provenant de la littérature.

Une estimation « y » du mesurande Y est obtenue à partir de l'équation en utilisant les estimations  $x_1, x_2, \dots, x_N$  des grandeurs d'entrée  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

L'écart-type estimé associé à l'estimation de sortie ou au résultat de mesure y, appelé incertitude-type composée, est déterminé à partir de l'écart-type estimé associé à chaque estimation d'entrée  $x_i$ , appelé incertitude-type.

Chaque estimation d'entrée  $x_i$  et son incertitude-type associée sont obtenues à partir d'une loi des valeurs possibles de la grandeur d'entrée  $X_i$ . Cette loi de probabilité peut être fondée sur une distribution de fréquence.

Les évaluations de Type A de composantes de l'incertitude-type sont fondées sur des distributions de fréquence alors que les évaluations de Type B sont fondées sur des lois a priori. On doit reconnaître que, dans les deux cas, les lois sont des modèles utilisés pour représenter l'état de notre connaissance.

#### **3.4.1. Evaluation de Type A de l'incertitude-type**

Dans la plupart des cas, la meilleure estimation disponible de l'espérance mathématique d'une grandeur qui varie au hasard, est la moyenne arithmétique des observations.

Par commodité, la variance et l'écart-type déduits de ces observations sont parfois appelés respectivement variance de Type A et incertitude-type de Type A.

Le nombre d'observations doit être suffisamment grand pour garantir une estimation fiable de l'espérance mathématique de la variable aléatoire et de la variance ou de l'écart-type.

#### **3.4.2. Evaluation de Type B de l'incertitude-type**

Pour une estimation d'une grandeur d'entrée qui n'a pas été obtenue à partir d'observations répétées, la variance estimée associée ou l'incertitude-type est évaluée par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité possible. L'ensemble d'informations accumulées peut comprendre :

- des résultats de mesures antérieures;
- l'expérience ou la connaissance générale du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisés;
- les spécifications du fabricant;
- les données fournies par des certificats d'étalonnage
- ou autres certificats;
- l'incertitude assignée à des valeurs de référence provenant d'ouvrages et manuels.

Par commodité, ces estimations sont parfois appelées respectivement variance de Type B et incertitude-type de Type B.

L'utilisation correcte de l'ensemble des informations disponibles pour une évaluation de Type B de l'incertitude-type fait appel à la perspicacité fondée sur l'expérience et les connaissances générales, et c'est une compétence qui peut s'apprendre par la pratique. On doit avoir en mémoire qu'une évaluation de Type B d'incertitude-type peut être aussi fiable qu'une évaluation de Type A, notamment dans une situation de mesure où une évaluation de Type A est fondée sur un nombre relativement faible d'observations statistiquement indépendantes.

### 3.5. Détermination de l'incertitude-type composée

Dès lors que toutes les **grandeurs d'entrée sont indépendantes**, l'incertitude-type composée est obtenue par une composition appropriée des incertitudes-types des estimations d'entrée, soit par la racine carrée de la variance composée donnée par

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i)$$

L'incertitude-type de chacune des grandeurs d'entrée est évaluée selon le Type A ou le Type B.

L'incertitude-type composée est un écart-type estimé et caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande Y.

L'équation ci-dessus fondées sur une approximation en série de Taylor du premier ordre de  $Y = f(X_i)$ , exprime **la loi de propagation de l'incertitude**.

Lorsque la non linéarité de f devient significative, il faut inclure des termes d'ordre plus élevé dans le développement en série de Taylor pour l'expression de l'équation. Lorsque la loi de chaque  $X_i$  est symétrique autour de sa moyenne, les termes les plus importants d'ordre immédiatement plus élevé à ajouter aux termes de l'équation sont

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i) u^2(x_j)$$

Les dérivées partielles, souvent appelées coefficients de sensibilité, décrivent comment varie l'estimation de sortie y en fonction des variations dans les valeurs des estimations d'entrée.

## 4. Structure du logiciel

**Ceq(m)Unc** est structuré comme un dossier de Microsoft© EXCEL 2002 et versions ultérieures.

C'est un programme transparent fait de plusieurs feuilles de travail et macro-instructions avec des formules disponibles et visibles à l'utilisateur.

Pour des raisons de sécurité, les feuilles de travail sont protégées par des mots de passe évitant l'exécution d'informations non désirées ou la falsification involontaire des formules codées.

## 5. Architecture générale

**Ceq(m)Unc** est divisé en au moins six modules comme suit :

- **module « Y »**,
  - pour la définition de la relation fonctionnelle liant le mesurande à 10 grandeurs d'influence possibles,
  - pour l'activation des macros de calcul des dérivées partielles par différences finies,
  - pour l'observation des résultats.
- **module « Détail des calculs »**
  - pour la définition et la quantification des incertitudes-types de chaque grandeur d'influence,
- **module « Calculs préalables »**
  - pour la description, sous formes de commentaires, de l'approche adoptée et la justification des relations fonctionnelles choisies,
- **module « Utilitaires »**
  - réservé au logiciel pour le calcul des différences finies,
- **module « Informations utiles »**

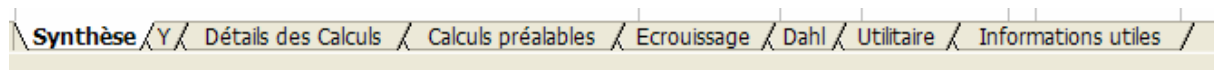
- rappelant les relations liant le range à l'écart-type dans le cas de différentes lois de distribution statistique,
- **module « Synthèse »**
  - pour l'affichage
  - des résultats synthétiques et
  - de la composition de la variance d'incertitude composée
  - en ses diverse contributions des grandeurs d'influence selon leur pondération.

Selon les cas, des modules supplémentaires sont introduits pour la quantification de l'incertitude sur un mesurande donné. Ainsi pour l'essai de traction et la limite d'élasticité conventionnelle à 0.2 %, deux modules supplémentaires ont été développés, soit :

- **module « Ecrouissage »**
  - destiné à évaluer le module de plasticité tangent ( $E_t$ ) dans le domaine des déformations intéressant la détermination de la limite conventionnelle d'élasticité,
- **module « Dahl »**
  - basé sur le modèle d'activation du Professeur DAHL de l'Université d'Aix-la-Chapelle et destiné à introduire les corrections liées à la température et à la vitesse de déformation.

## 6. Survol des différentes feuilles de travail

Les onglets des différentes feuilles de travail dans **Ceq(m)Unc** sont indiqués ci-dessous :

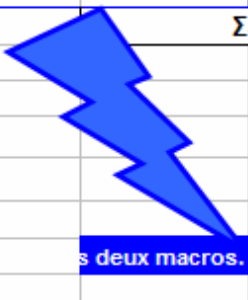


## 7. Liste des différentes macro instructions

**Ceq(m)Unc** utilise différentes macro instructions illustrées ci-dessous par leur icône :


**Macro « Formule »** sur la feuille « Y » destinée à implémenter les différences finies pour les dérivées du premier ordre :

1E+02	$u(x_i)$	1.00E-12	$\Sigma_1$	2
			$\Sigma_1 + \Sigma_2$	2
ité				
im <sup>2</sup>				
im <sup>2</sup>				
m				
im <sup>2</sup>				
m				

icône :  s deux macros.

**Macro « Retour »** sur la feuille « Utilitaire » destinée à revenir à la feuille « Y » après implémentation des différences finies :

0	
5.45E+02	

icône : 



- en assurant que

- $f'(x_i) = f(x_i) - Y \approx 0$

Sous ces conditions, les relations aux dérivées partielles se simplifient considérablement. On se référera aux formules présentées dans le diaporama de présentation de l'incertitude de mesure (disponible sur le CD-rom du logiciel et reproduit en Annexe 01).

## 10. Mise en application du logiciel

La mise en application du logiciel est documentée à partir de l'exemple H1 d'étalonnage de calibres bout à bout présenté dans le Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (Annexe H, exemple 1). Cet exemple est reproduit en Annexe 02.

### 10.1. Définition de la relation fonctionnelle

La relation fonctionnelle entre le mesurande et les grandeurs d'influence demande doit être définie très soigneusement **en veillant à ce que les différentes grandeurs soient bien indépendantes les unes des autres**. Cette démarche initiale est essentielle de façon à s'affranchir de devoir tenir compte des covariances entre les grandeurs et d'appliquer simplement la loi d'additivité des variances.

Cette relation est définie à l'équation H3 du guide :

$$\begin{aligned}
 l &= f(l_S, d, \alpha_S, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) \\
 &= l_S + d - l_S [\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta]
 \end{aligned}
 \quad \dots \quad (H.3)$$

Elle est recopiée sous sa forme analytique « carrée » en feuille « Y » du logiciel :

A	B	C	D
Relation fonctionnelle : $Y^2 = f(X_i) = g(X_i)$ $l^2 = [l_S + d - l_S (\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta)]^2$			

Elle est ensuite implémentée en format de formule EXCEL :



Le logiciel inscrit les formules nécessaires à la feuille « Utilitaire » et affiche :

Il convient alors de cliquer sur la flèche pour activer la macro « Retour » et revenir en feuille « Y » en cellule « G27 » avec indication que les formules sont bien enregistrées :

Repondre en indiquant des modifications... Terminer la revision...

Formule enregistrée si vous revenez à cette case après l'exécution des deux macros.

B	C	D	E	F	G
		0.00E+00	1		1.00E-12
		0.00E+00	1		1.00E-12
	$Y^2 =$	50000800	1.44E+03	$u(x_i)^{lb}$	1.00E-12
					$\Sigma_1^+$
Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité		
Longueur d'un calibre	$l$	50 000 838	nm		
Incertitude-type composée	$u_c$	32	nm		
Incertitude-type composée relative	$u_c / l$	1	ppm		
Facteur d'élargissement	$k$	2.00			
Incertitude élargie	$U$	63	nm		deux macros...

#### 10.4. Définition des incertitudes-types individuelles

Les incertitudes-types individuelles des grandeurs d'influence sont inscrites à la feuille « Détails des calculs » en suivant scrupuleusement les données du Guide pour chacune des grandeurs. Les différentes incertitudes-types sur une même grandeur seront automatiquement gérées par le logiciel sur base de l'additivité des variances de façon à fournir un écart-type composé :

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Symbole	$X_{(i)}$	Source de l'incertitude		$u(x_i)$	Unité				
2	IS	1	Etalonnage du calibre étalon		25.000	nm				
3		2				nm				
4		3				nm				
5		4				nm				
6		5				nm				
7	Is	$\Sigma$	Longueur de l'étalon à 20°C		2.500E+01	nm				
8	$d$	1	Observations répétées		5.800	nm				
9	$d1$	2	Effets aléatoires du comparateur		3.900	nm				
10	$d2$	3	Effets systématiques du comparateur		6.700	nm				
11		4				nm				
12		5				nm				
13	$d$	$\Sigma$	Différence des longueurs		9.682E+00	nm				
14	$\alpha s$	1	Coefficient de dilatation thermique du calibre étalon		0.0000012	°C-1				
15		2				°C-1				
16		3				°C-1				
17		4				°C-1				
18		5				°C-1				
19	$\alpha s$	$\Sigma$	Coefficient de dilatation thermique de l'étalon		1.200E-06	°C-1				
20	$\theta$	1	Température moyenne du banc		0.200	°C	Cyclique (arcsinus)	6	0	2.12
21	$\Delta$	2	Variation cyclique de la température de la salle		0.350	°C	Uniforme	6	6	1.73
22		3				°C	Trapézoïdale	6	6	1.73
23		4				°C	Trapézoïdale	6	1	1.24
24		5				°C	Trapézoïdale	6	5	1.69
25	$\theta$	$\Sigma$	Ecart de température du calibre par rapport à 20°C		4.031E-01	°C	Trapézoïdale	6	4	1.47
26	$\delta\alpha$	1	Différence entre les coefficients de dilatation des calibres		0.000	°C-1	Trapézoïdale	6	3	1.37
27		2				°C-1	Trapézoïdale	6	3	1.37

L'introduction d'une incertitude-type donnée peut être facilitée par le tableau reproduit de la feuille « Informations utiles » qui exprime pour différentes distributions la relation entre le range et l'écart-type. Il suffit d'insérer un range dans ce tableau et de lire l'écart-type correspondant pour la loi adéquate et de reporter cette valeur dans la case concernée de la grandeur d'entrée.

### 10.5. Définition des valeurs des grandeurs d'influence

De retour à la feuille « Y », les valeurs des grandeurs d'influence sont implémentées :

$X_1$	Longueur de l'étalon à 20°C	Is	2.00E+00	50 000 623	nm
$X_2$	Différence des longueurs	d	2.00E+00	215	nm
$X_3$	Coefficient de dilatation thermique de l'étalon	$\alpha s$	0.00E+00	0.0000115	°C <sup>-1</sup>
$X_4$	Ecart de température du calibre par rapport à 20°C	$\theta$	0.00E+00	0	°C
$X_5$	Différence des coefficients de dilatation Calibre-Etalon	$\delta\alpha$	0.00E+00	0	°C <sup>-1</sup>
$X_6$	Différence des écarts de température Calibre-Etalon	$\delta\theta$	6.61E+05	0	°C
$X_7$			0.00E+00		
$X_8$			0.00E+00		
$X_9$			0.00E+00		
$X_{10}$			0.00E+00		

### 10.6. Lecture de l'incertitude composée

A ce stade, l'incertitude composée est accessible à la feuille « Y », sous différentes formes :

- Incertitude-type composée,
- Incertitude-type composée relative
- Incertitude élargie
- Incertitude élargie relative.

Le choix du facteur d'élargissement est libre et ici choisi égal à 2 :



**Macro pour Copier et Coller la VALEUR après chaque itération**

0.00E+00	0.00E+00	<b>Contributions du 2nd Ordre</b>							
$u(x_i)$									
0.00E+00	0.00E+00								
0.00E+00	6.25E-02	1.25E-01							
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00					
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00				
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.37E+02			
0.00E+00	2.50E-01	1.25E-01	2.50E-01	2.62E+00	2.50E-01	2.50E-01			
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
$x-\Delta y+\Delta$	$x,y-\Delta$	$x-\Delta,y$	$x-\Delta,y-\Delta$	$u(x_i)$	$u(x_i)$	$\Sigma_2 =$			
50 000 623	50 000 623	50 000 623	50 000 623	0.00E+00	0.00E+00	1.41E+02			
215	215	215	215	0.00E+00	0.00E+00				
0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00				
0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00				
0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00				
0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00				
0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00				
0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00				
0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00				
0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00				

OK ?

Si les trois estimations sont jugées concordantes, la macro « Back » est activée en cliquant sur le bouton, qui ramène alors à cet endroit du tableau :

		0.00E+00		1.00E-12	1	0.00E+00
	$Y^2 =$	0	2.50E+15	$u(x_i)$	1.00E-12	$\Sigma_1$ 9.9700E+02
						$\Sigma_1 + \Sigma_2$ 1.1376E+03
Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité			ls
Longueur d'un calibre	l	50 000 838	nm			d
Incertitude-type composée	$u_c$	34	nm			as
Incertitude-type composée relative	$u_c / l$	0.67	ppm			$\theta$
Facteur d'élargissement	k	2.00				$\delta\alpha$
Incertitude élargie	U	67	nm			$\delta\theta$
Incertitude élargie relative	U / l	1.35	ppm			0
	soit					0
	l	= 50 000 838	±	67	nm	0
						$Y^2 =$

On peut alors lire l'incertitude-type affectée des effets du second ordre qui passe alors de 32 à 34 nm.

L'écart des variances entre premier et second ordre est visible sur les deux cases :

1.00E-12	$\Sigma_1$	9.9700E+02
	$\Sigma_1 + \Sigma_2$	1.1376E+03

Le résultat du logiciel peut être comparé à celui du Guide :

$$l_S u(\alpha_S) u(\delta\theta) = (0,05 \text{ m}) (1,2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) (0,029 \text{ }^\circ\text{C}) = 1,7 \text{ nm}$$

Les termes de deuxième ordre font croître  $u_c(l)$  de 32 nm à 34 nm.

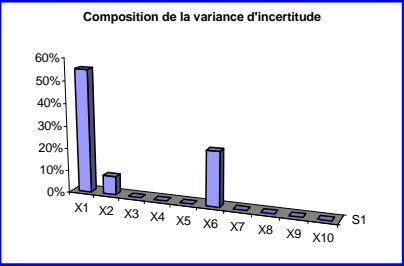
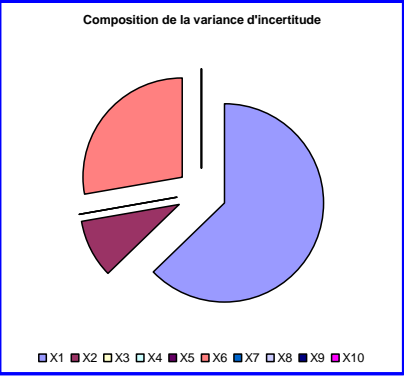
### 10.8. Rédaction des commentaires

S'il est jugé nécessaire, des commentaires sur les options du calcul peuvent être rédigées à la feuille « Calculs préalables ».

### 10.9. Rapport de synthèse

La feuille « synthèse fournit une présentation synthétique et imagée des résultats permettant notamment de pondérer les effets des grandeurs d'influence sur l'incertitude composée :

Y	Mesurande	Symbole	Unité	Variances relatives
	Longueur d'un calibre	l	nm	
X <sub>1</sub>	Grandeur d'entrée			
X <sub>1</sub>	Longueur de l'étalon à 20°C	ls	nm	55%
X <sub>2</sub>	Différence des longueurs	d	nm	8%
X <sub>3</sub>	Coefficient de dilatation thermique de l'étalon	αs	°C-1	0%
X <sub>4</sub>	Ecart de température du calibre par rapport à 20°C	θ	°C	0%
X <sub>5</sub>	Différence des coefficients de dilatation Calibre-Etalon	δα	°C-1	0%
X <sub>6</sub>	Différence des écarts de température Calibre-Etalon	δθ	°C	24%
X <sub>7</sub>	0	0	0	0%
X <sub>8</sub>	0	0	0	0%
X <sub>9</sub>	0	0	0	0%
X <sub>10</sub>	0	0	0	0%
	Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité
	Longueur d'un calibre	l	50 000 838	nm
	Incertitude-type composée	uc	33.7	nm
	Variance d'incertitude	u <sup>2</sup> c	1137.6	nm <sup>2</sup>
	Facteur d'élargissement	k	2.00	0
	Incertitude élargie	U	67.5	nm



### 11. Etude de sensibilité

Le logiciel est muni de différentes fonctions permettant d'appréhender la sensibilité des calculs.

#### 11.1. Effet des incréments de calcul des dérivées partielles pour le premier ordre

Un coefficient α permet de pondérer les incréments pour le calcul des dérivées partielles par différences finies. Ce coefficient, qui multiplie l'incertitude-type de chaque grandeur d'influence, est en principe chois égal à 1 mais peut être affiché à d'autres valeurs pour évaluer la sensibilité :

**$\alpha$  : généralement +1, mais modifiable de façon à examiner la sensibilité de l'estimation de la dérivée. Une valeur rouge signifie une dérivée négative.**

				$\Delta^2g/\Delta x_i^2 \cdot u^2(x_i)/2$
$x_i$	Unité	$u(x_i)$	$\alpha$	- f. $\Delta^2f/\Delta x_i^2 \cdot u^2(x_i)$
50 000 623	nm	2.50E+01	1	6.25E+02

Deux exemples relatifs à resp. 0.1 et 10 sont ici traités dans le cadre de l'estimation au premier ordre de l'incertitude :

Longueur de l'étalon à 20°C	ls	1.92E+00	50 000 623	nm	2.50E+01	0.1	6.00E+02
Différence des longueurs	d	2.13E+00	215	nm	9.68E+00	0.1	1.00E+02
Coefficient de dilatation thermique de l'étalon	$\alpha_s$	0.00E+00	0.0000115	°C <sup>-1</sup>	1.20E-06	0.1	0.00E+00
Ecart de température du calibre par rapport à 20°C	$\theta$	0.00E+00	0	°C	4.03E-01	0.1	0.00E+00
Différence des coefficients de dilatation Calibre-Etalon	$\delta\alpha$	0.00E+00	0	°C <sup>-1</sup>	5.80E-07	0.1	0.00E+00
Différence des écarts de température Calibre-Etalon	$\delta\theta$	7.13E+05	0	°C	2.90E-02	0.1	3.00E+02
		0.00E+00			1.00E-12	0.1	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	0.1	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	0.1	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	0.1	0.00E+00
	Y <sup>2</sup> =	0	2.50E+15	$u(x_i)^{10}$	1.00E-12	$\Sigma_1$	1.0000E+03
						$\Sigma_1 + \Sigma_2$	1.0000E+03
Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité				ls
Longueur d'un calibre	l	50 000 838	nm				d
Incertitude-type composée	$u_c$	32	nm				$\alpha_s$

Longueur de l'étalon à 20°C	ls	2.00E+00	50 000 623	nm	2.50E+01	10	6.25E+02
Différence des longueurs	d	2.00E+00	215	nm	9.68E+00	10	9.37E+01
Coefficient de dilatation thermique de l'étalon	$\alpha_s$	0.00E+00	0.0000115	°C <sup>-1</sup>	1.20E-06	10	0.00E+00
Ecart de température du calibre par rapport à 20°C	$\theta$	0.00E+00	0	°C	4.03E-01	10	0.00E+00
Différence des coefficients de dilatation Calibre-Etalon	$\delta\alpha$	0.00E+00	0	°C <sup>-1</sup>	5.80E-07	10	0.00E+00
Différence des écarts de température Calibre-Etalon	$\delta\theta$	6.61E+05	0	°C	2.90E-02	10	2.78E+02
		0.00E+00			1.00E-12	10	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	10	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	10	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	10	0.00E+00
	Y <sup>2</sup> =	0	2.50E+15	$u(x_i)^{10}$	1.00E-12	$\Sigma_1$	9.9680E+02
						$\Sigma_1 + \Sigma_2$	9.9680E+02
Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité				ls
Longueur d'un calibre	l	50 000 838	nm				d
Incertitude-type composée	$u_c$	32	nm				$\alpha_s$
Incertitude-type composée relative	$u_c / l$	0.63	ppm				$\theta$

## 11.2. Effet de la valeur de la fonctionnelle au point de fonctionnement

Les formules utilisées par le logiciel pour l'estimation de l'incertitude au second ordre trouvent, comme il est expliqué dans les développements mathématiques du diaporama sur l'incertitude de mesure, leur précision maximale lorsque la fonctionnelle «  $f(x_i)$  » de définition du mesurande est nulle au point de fonctionnement. La case « Y !D20 » du logiciel permet d'ajuster la valeur de la fonctionnelle à tout niveau. En choisissant une valeur proche de celles du mesurande mais **jamais supérieure à celle-ci**, il est possible d'estimer la sensibilité des calculs à cet effet.

Les deux exemples ci-dessous sont relatifs à une valeur prise resp. soit égale à celle du mesurande soit égale à 0 ; ils intègrent les effets du second ordre également :

Mesurande	Symbole	Unité	signifie une variance négative.				
Longueur d'un calibre	l	nm					$\Delta^2g/\Delta x^2 \cdot u^2(x_i)/2$
Grandeur d'entrée	Symbole	$\Delta^2g/\Delta X_i^2$	$x_i$	Unité	$u(x_i)$	$\alpha$	$-f \cdot \Delta^2f/\Delta x^2 \cdot u^2(x_i)$
Longueur de l'étalon à 20°C	ls	2.00E+00	50 000 623	nm	2.50E+01	1	6.25E+02
Différence des longueurs	d	2.00E+00	215	nm	9.68E+00	1	9.37E+01
Coefficient de dilatation thermique de l'étalon	as	0.00E+00	0.0000115	°C <sup>-1</sup>	1.20E-06	1	0.00E+00
Ecart de température du calibre par rapport à 20°C	θ	0.00E+00	0	°C	4.03E-01	1	0.00E+00
Différence des coefficients de dilatation Calibre-Etalon	δα	0.00E+00	0	°C <sup>-1</sup>	5.80E-07	1	0.00E+00
Différence des écarts de température Calibre-Etalon	δθ	6.61E+05	0	°C	2.90E-02	1	2.78E+02
		0.00E+00			1.00E-12	1	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	1	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	1	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	1	0.00E+00
	Y <sup>2</sup> =	50000838	0.00E+00	$u(x_i)^{10}$	1.00E-12	Σ <sub>1</sub>	9.9680E+02
						Σ <sub>1</sub> +Σ <sub>2</sub>	1.1365E+03
Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité				ls
Longueur d'un calibre	l	50 000 838	nm				d
Incertitude-type composée	u <sub>c</sub>	34	nm				as
Incertitude-type composée relative	u <sub>c</sub> / l	0.67	ppm				θ
Facteur d'élargissement	k	2.00					δα
Incertitude élargie	U	67	nm				δθ
Incertitude élargie relative	U / l	1.35	ppm				0

Mesurande	Symbole	Unité	signifie une variance négative.				
Longueur d'un calibre	l	nm					$\Delta^2g/\Delta x^2 \cdot u^2(x_i)/2$
Grandeur d'entrée	Symbole	$\Delta^2g/\Delta X_i^2$	$x_i$	Unité	$u(x_i)$	$\alpha$	$-f \cdot \Delta^2f/\Delta x^2 \cdot u^2(x_i)$
Longueur de l'étalon à 20°C	ls	2.00E+00	50 000 623	nm	2.50E+01	1	6.25E+02
Différence des longueurs	d	2.01E+00	215	nm	9.68E+00	1	9.40E+01
Coefficient de dilatation thermique de l'étalon	as	0.00E+00	0.0000115	°C <sup>-1</sup>	1.20E-06	1	0.00E+00
Ecart de température du calibre par rapport à 20°C	θ	0.00E+00	0	°C	4.03E-01	1	0.00E+00
Différence des coefficients de dilatation Calibre-Etalon	δα	0.00E+00	0	°C <sup>-1</sup>	5.80E-07	1	0.00E+00
Différence des écarts de température Calibre-Etalon	δθ	6.61E+05	0	°C	2.90E-02	1	2.78E+02
		0.00E+00			1.00E-12	1	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	1	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	1	0.00E+00
		0.00E+00			1.00E-12	1	0.00E+00
	Y <sup>2</sup> =	0	2.50E+15	$u(x_i)^{10}$	1.00E-12	Σ <sub>1</sub>	9.9700E+02
						Σ <sub>1</sub> +Σ <sub>2</sub>	1.1376E+03
Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité				ls
Longueur d'un calibre	l	50 000 838	nm				d
Incertitude-type composée	u <sub>c</sub>	34	nm				as
Incertitude-type composée relative	u <sub>c</sub> / l	0.67	ppm				θ
Facteur d'élargissement	k	2.00					δα
Incertitude élargie	U	67	nm				δθ
Incertitude élargie relative	U / l	1.35	ppm				0

## 12. Indication importante

Le calcul des dérivées partielles pour les effets du premier ordre est effectué en activant les macros « Formule » et « Retour ».

Lorsqu'il est activé, ce calcul remet à zéro tous les calculs relatifs au second ordre et vide la partie de la feuille qui contenait ces données. A ce moment les deux cases de variance sont identiques :

1.00E-12	Σ <sub>1</sub>	9.9700E+02
	Σ <sub>1</sub> +Σ <sub>2</sub>	9.9700E+02

Pour évaluer les effets du second ordre, les macros « Secord » et « Back » sont activées, ce qui a pour effet de remplir la partie de la feuille avec les données nécessaires et de différencier les deux cases de variance :

1.00E-12	$\Sigma_1$	9.9700E+02
	$\Sigma_1 + \Sigma_2$	1.1376E+03

Pour revenir à la situation précédente, il suffit d'activer encore les macros « Formule » et « Retour ».

### 13. Information sur le temps de calcul

Les calculs se font par Excel et ne nécessitent aucune itération pour l'estimation des effets du premier ordre. Le temps de calcul relatif à la détermination des dérivées partielles nécessaires est inférieur à une seconde sur une station portable de type Compaq nw8440.

Pour l'estimation des effets du deuxième ordre, trois itérations sont réalisées d'office avec différents incréments, le temps de calcul est de l'ordre de 10 secondes sur la même station de travail.

### 14. Informations complémentaires

L'Annexe 03 présente encore les différentes feuilles du logiciel et les manipulations sur celui-ci.

## 15. Annexe 1, Diaporama sur l'incertitude de mesure

# L'incertitude de Mesure Son Evaluation

Jacques DEFOURNY

CEQMAS

Consultancy, Expertise in Quality, Materials and Systems



## Quelques Définitions

Vocabulaire International des termes généraux et fondamentaux de Métrologie

- Mesurande
  - grandeur particulière soumise à mesurage
- Grandeur d'influence
  - Grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage
- Incertitude de mesure
  - Paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande
- Erreur de mesure
  - Résultat du mesurage moins une valeur vraie du mesurande

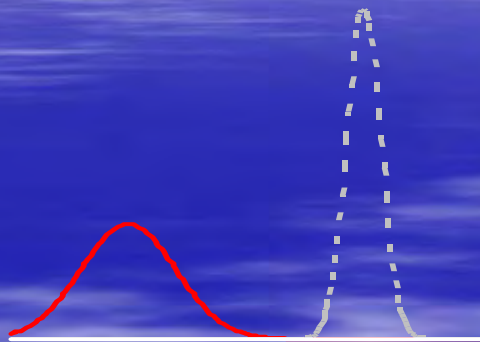


# Erreur et Incertitude



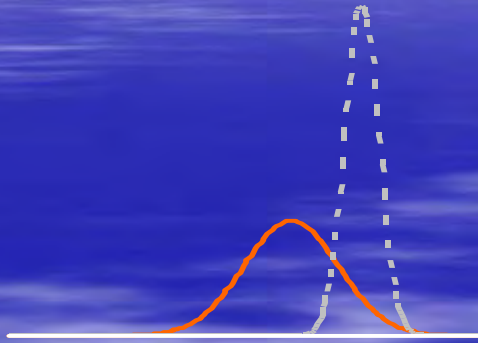
ceqmas

# Erreur et Incertitude



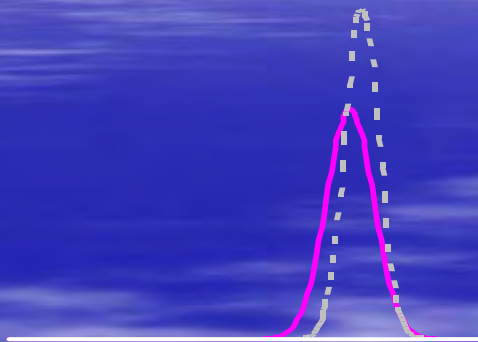
ceqmas

# Erreur et Incertitude



ceqmas

# Erreur et Incertitude



ceqmas

## L'importance de la Loi Normale

- Théorème de la limite centrale
- Si  $Y = \sum c_i X_i$  et si tous les  $X_i$  répondent à la loi normale, la loi convoluée de  $Y$  est normale.
- Si les  $X_i$  ne répondent pas à la loi normale, la loi convoluée de  $Y$  est approximativement normale, si la variance de  $Y$  est grande par rapport aux variances des  $c_i X_i$ .
- Si les  $X_i$  sont indépendants, la moyenne et la variance de  $Y$  s'expriment comme
  - $E(Y) = \sum c_i E(X_i)$ ,
  - $\sigma^2(Y) = \sum c_i^2 \sigma^2(X_i)$ .



## Définitions associées à l'Incertitude

- Incertitude-type
  - Incertitude exprimée sous la forme d'un écart-type
- Incertitude-type composée
  - Incertitude-type du résultat du mesurage, lorsque ce résultat est obtenu à partir des valeurs d'autres grandeurs, égale à la racine carrée d'une somme de variances (**covariances**) pondérées
- Incertitude élargie
  - Grandeur définissant un intervalle, autour du résultat dont on peut s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande
- Facteur d'élargissement
  - Facteur numérique utilisé comme multiplicateur de l'incertitude-type pour obtenir l'incertitude élargie



## Incertitudes de types A et B

- Incertitude de type A
  - Méthode d'évaluation de l'incertitude par l'analyse statistique de séries d'observations
- Incertitude de type B
  - Méthode d'évaluation de l'incertitude par des moyens autres que l'analyse statistique de séries d'observations



## Modélisation du Mesurage

- Un mesurande  $Y$  est rarement mesuré directement mais généralement déterminé à partir de  $N$  autres grandeurs  $X_i$  à travers une relation fonctionnelle  $f$  :

$$Y = f(X_i)$$

- Les grandeurs d'entrée  $X_i$  peuvent elles-mêmes être envisagées comme mesurandes et dépendre d'autres grandeurs, en ce compris les corrections pour les effets systématiques.



## Incertitude de type A

- L'évaluation de type A est basée sur des distributions de fréquences.
- Conséquence : Nécessité de nombreuses observations expérimentales cohérentes et faisant intervenir toutes les grandeurs d'entrée.
- Hypothèses de base :
  - Loi normale,
  - Meilleure estimation : Moyenne arithmétique,
  - Dispersion quantifiée par la variance et l'écart-type,
  - Variance de la moyenne liée à la variance des valeurs individuelles.

ceqmas

## Incertitude de type A

- Lois de base :
  - $\bar{x} = 1/n \sum x_i$
  - $s^2(x_i) = 1/(n-1) \sum (x_i - \bar{x})^2$
  - $s^2(\bar{x}) = s^2(x_i) / n$
- Nombre de degrés de liberté :
  - $n - 1$  pour  $n$  observations
- Ces lois ne sont valables que si les observations NE sont pas corrélées !

ceqmas

## Incertitude de type B

- L'évaluation de type B est basée sur des lois a priori.
- Conséquence : Nécessité d'un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles sur la variabilité de la grandeur.
- Hypothèses de base :
  - Loi spécifique,
  - Théorème de la limite centrale,
  - Dispersion quantifiée par la variance et l'écart-type,
  - Additivité des variances (covariances).



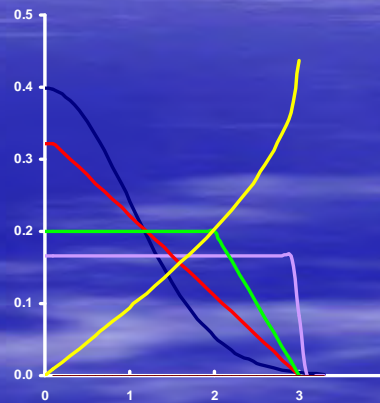
## Incertitude de type B

- Lois de base :
  - $s_m(x_i) = (a_+ - a_-) / 6 * K_{\text{loi de distribution}}$
  - $s^2(x_i) = \sum s_m^2(x_i)$
  - $s^2(\bar{x}) = s^2(x_i) / n$
- Nombre de degrés de liberté :
  - $n_m - 1$  pour  $n_m$  observations
  - Additivité selon des lois spécifiques
- Ces lois ne sont valables que si les observations NE sont pas corrélées !



## Quelques Distributions Statistiques

- Range : [-3 ; +3] : 6
- Ecart-type :
  - Loi Normale
    - (Range/6) \* 1
  - Loi Triangulaire
    - (Range/6) \* 1.22
  - Loi Trapézoïdale (2-3)
    - (Range/6) \* 1.47
  - Loi Uniforme
    - (Range/6) \* 1.73
  - Loi Cyclique
    - (Range/6) \* 2.12



## Incertitude-type Composée

- Loi de propagation de l'incertitude
  - $Y + \Delta Y = f(X_i + \Delta X_i)$
  - $u_c(y) = F [u(x_i)]$
- Base de calcul
  - Loi de Taylor à plusieurs variables



## Incertitude-type Composée

- $Y + \Delta Y = f(X_i + \Delta X_i)$
- $u_c(y) = F [u(x_i)]$
- $\Delta Y = f(X_i + \Delta X_i) - f(X_i)$
- $\Delta y = \sum C_n^j \cdot D_{x_l x_k}^{n_j} f(x_i) \Delta x_{lk}^{n/n!} + \dots \Delta x_{dfgh\dots}^{n/n!}$
- $\Delta y^2 = (\sum C_n^j \cdot D_{x_l x_k}^{n_j} f(x_i) \Delta x_{lk}^{n/n!})^2$
- $u_c^2(y) = E \Delta y^2 = E (\sum C_n^j \cdot D_{x_l x_k}^{n_j} f(x_i) \Delta x_{lk}^{n/n!})^2$ 
  - sachant que
    - $E(\Delta x_i)^2 = u^2(x_i)$
    - $E(\Delta x_{lk})^n = G(u^2(x_i))$



## Loi de Taylor à 2 variables

- $f(x+u, y+v) =$
- $f(x, y)$ 
  - $+ 1/1$
- $u Dx f + v Dy f$ 
  - $+ 1/2$
- $u^2 D^2x^2 f + 2uv D^2xy f + v^2 D^2y^2 f$ 
  - $+ 1/6$
- $u^3 D^3x^3 f + 3u^2v D^3x^2y f + 3uv^2 D^3xy^2 f + v^3 D^3y^3 f$ 
  - $+ 1/24$
- $u^4 D^4x^4 f + 4u^3v D^4x^3y f + 6u^2v^2 D^4x^2y^2 f + 4uv^3 D^4xy^3 f + v^4 D^4y^4 f$



## Loi de propagation au 1er Ordre de l'Incertitude-type Composée

- $u_c^2(f) = E\Delta f^2$
- $= E\left(\sum C_n^j \cdot D_{x_j x_k}^n \cdot f(x_i) \Delta x_i^n / n!\right)^2$
- $= E(u Dx f + v Dy f)^2$
- $= E[u^2 (Dx f)^2 + 2uv Dx f Dy f + v^2 (Dy f)^2]$
- $= u^2 (Dx f)^2 + v^2 (Dy f)^2$
- sachant que
  - $E(u)^2 = u^2(x)$
  - $E(v)^2 = u^2(y)$
  - $E(uv) = 0$



## Loi de propagation au 2nd Ordre de l'Incertitude-type Composée

- $u_c^2(f) = E\Delta f^2$
- $= E\left(\sum C_n^j \cdot D_{x_j x_k}^n \cdot f(x_i) \Delta x_i^n / n!\right)^2$
- $= E(u Dx f + v Dy f + \frac{1}{2} u^2 D^2 x^2 f + uv D^2 xy f + \frac{1}{2} v^2 D^2 y^2 f + \frac{1}{6} u^3 D^3 x^3 f +$   
 $\frac{1}{2} u^2 v D^3 x^2 y f + \frac{1}{2} uv^2 D^3 xy^2 f + \frac{1}{6} v^3 D^3 xy^2)^2$
- $= E[u^2 (Dx f)^2 + v^2 (Dy f)^2 + \dots]$
- $= u^2 (Dx f)^2 + v^2 (Dy f)^2 + \dots$
- sachant que
  - $E_{u^{pair} v^{impair}} = 0$
  - $E_{u^{pair} v^{pair}} > 0$



## Autre approche

- $Y + \Delta Y = f(X_i + \Delta X_i)$
- $\Delta y = f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)$
- $\Delta y^2 = [f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)]^2$
- $\Delta y^2 = [f^2(x_i + \Delta x_i) - 2 f(x_i + \Delta x_i) \cdot f(x_i) + f^2(x_i)]$
- $E\Delta y^2 = E[f^2(x_i + \Delta x_i) - 2 f(x_i + \Delta x_i) \cdot f(x_i) + f^2(x_i)]$
- $E\Delta y^2 = E f^2(x_i + \Delta x_i) - E^2 f(x_i) - 2 E[f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)] \cdot f(x_i)$
- $u_c^2(y) = E g(x_i + \Delta x_i) - E g(x_i) - 2 \sigma(f(x_i)) \cdot f(x_i)$ 
  - Si l'on pose

$$g(x_i) = f^2(x_i) \quad \text{et} \quad \sigma(f(x_i)) = E[f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)]$$



## Approche au 2nd Ordre de l'Incertitude-type Composée

- $f^2(x+u, y+v) - f^2(x, y) =$ 
  - $+ 1/1$
- $u D_x f^2 + v D_y f^2$ 
  - $+ 1/2$
- $u^2 D^2 x^2 f^2 + 2uv D^2 xy f^2 + v^2 D^2 y^2 f^2$ 
  - $+ 1/6$
- $u^3 D^3 x^3 f^2 + 3u^2v D^3 x^2 y f^2 + 3uv^2 D^3 xy^2 f^2 + v^3 D^3 y^3 f^2$ 
  - $+ 1/24$
- $u^4 D^4 x^4 f^2 + 4u^3v D^4 x^3 y f^2 + 6u^2v^2 D^4 x^2 y^2 f^2 + 4uv^3 D^4 xy^3 f^2 + v^4 D^4 y^4 f^2$



## Approche au 2nd Ordre de l'Incertitude-type Composée

- $u_c^2 = E[f^2(x+u, y+v) - f^2(x, y)] =$ 
  - $+ 1/1$
  - $u D_x f^2 + v D_y f^2$ 
    - $+ 1/2$
  - $u^2 D^2x^2 f^2 + 2uv D^2xy f^2 + v^2 D^2y^2 f^2$ 
    - $+ 1/6$
  - $u^3 D^3x^3 f^2 + 3u^2v D^3x^2y f^2 + 3uv^2 D^3xy^2 f^2 + v^3 D^3y^3 f^2$ 
    - $+ 1/24$
  - $u^4 D^4x^4 f^2 + 4u^3v D^4x^3y f^2 + 6u^2v^2 D^4x^2y^2 f^2 + 4uv^3 D^4xy^3 f^2 + v^4 D^4y^4 f^2$



## Approche au 2nd Ordre de l'Incertitude-type Composée

- $u_c^2 = E[f^2(x+u, y+v) - f^2(x, y)] =$
- $E[ u^2/2 D^2x^2 f^2 + v^2/2 D^2y^2 f^2 +$   
 $u^4/24 D^4x^4 f^2 + u^2v^2/4 D^4x^2y^2 f^2 + v^4/24 D^4y^4 f^2 ] =$
- $u^2/2 D^2x^2 f^2 + v^2/2 D^2y^2 f^2 +$   
 $u^4/8 D^4x^4 f^2 + u^2v^2/4 D^4x^2y^2 f^2 + v^4/8 D^4y^4 f^2$ 
  - sachant que
    - $E u^4 = 3 u^4$  (loi normale)
    - $E u^2v^2 = u^2 v^2$  si u et v ne sont pas corrélés.



## Calcul de $\sigma(f(x_i)) = E[f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)]$

- $\sigma(f(x_i)) = E[f(x+u, y+v) - f(x, y)] =$
- $E[ u^2/2 D^2x^2 f + v^2/2 D^2y^2 f +$   
 $u^4/24 D^4x^4 f + u^2v^2/4 D^4x^2y^2 f + v^4/24 D^4y^4 f ] =$
- $u^2/2 D^2x^2 f + v^2/2 D^2y^2 f +$   
 $u^4/8 D^4x^4 f + u^2v^2/4 D^4x^2y^2 f + v^4/8 D^4y^4 f$ 
  - sachant que
  - $E u^4 = 3 u^4$  (loi normale)
  - $E u^2v^2 = u^2 v^2$  si u et v ne sont pas corrélés.



## Correction relative à $\sigma(f(x_i))$

- $- 2 \sigma(f(x_i)) =$
- $- u^2 D^2x^2 f - v^2 D^2y^2 f$   
 $- u^4/4 D^4x^4 f - u^2v^2/2 D^4x^2y^2 f - v^4/4 D^4y^4 f$



## Correction relative à $-2\sigma(f(x_i)) * f(x_i)$

- $- 2 \sigma(f(x_i)) * f(x_i) =$
- $(- u^2 D^2x^2 f - v^2 D^2y^2 f - u^4/4 D^4x^4 f - u^2v^2/2 D^4x^2y^2 f - v^4/4 D^4y^4 f) * f(x_i) \approx$
- $(- u^2 D^2x^2 f - v^2 D^2y^2 f) * f(x_i) =$
- **0 si  $f(x_i) = 0$**



## Structure de la feuille de calcul de l'incertitude-type composée

- Définition de la relation fonctionnelle
  - $Y = f(x, y, z, t, \dots)$
- Calcul des incertitudes types des grandeurs d'entrée
  - Somme de variances
- Calcul des différentes dérivées
  - Ecriture des relations exprimant les différentes dérivées puis calcul numérique de celles-ci
  - Détermination des dérivées par voie numérique à partir de la relation fonctionnelle de base
- Type d'approche
  - Premier Ordre sur base de la fonction «  $f$  »
  - Second Ordre sur base de la fonction «  $f^2$  »



## Expression des Dérivées par Différences Finies

- $D_x f =$ 
  - $1/\Delta [f(x+\Delta) - f(x)]$
  - $1/2\Delta [f(x+\Delta) - f(x-\Delta)]$
- $D^2_x f =$ 
  - $1/\Delta^2 [f(x+\Delta) - 2f(x) + f(x-\Delta)]$
- $D^3_x f =$ 
  - $1/\Delta^3 [f(x+2\Delta) - 3f(x+\Delta) + 3f(x) - f(x-\Delta)]$
- $D^4_x f =$ 
  - $1/\Delta^4 [f(x+2\Delta) - 4f(x+\Delta) + 6f(x) - 4f(x-\Delta) + f(x-2\Delta)]$



## Expression des Dérivées Croisées par Différences Finies

- $D^2_{xy} f =$ 
  - $1/\Delta^2 [f(x+\Delta, y+\Delta) - f(x, y+\Delta) - f(x+\Delta, y) + f(x, y)]$
- $D^4_{x^2y^2} f =$ 
  - $1/\Delta^4 [$ 
    - $f(x+2\Delta, y+2\Delta)$
    - $- 2f(x+2\Delta, y+\Delta) - 2f(x+\Delta, y+2\Delta) - 2f(x+\Delta, y) - 2f(x, y+\Delta)$
    - $+ 4 f(x+\Delta, y+\Delta)$
    - $+ f(x+2\Delta, y) + f(x, y+2\Delta)$
    - $+ f(x, y)$

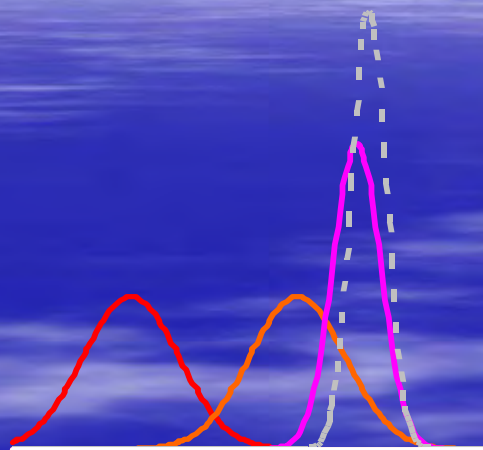


## Option actuelle concernant les Degrés de Liberté

- Baser les incertitudes de type A ou B sur un nombre suffisant d'observations de manière à ce que l'estimation de l'écart-type soit valable
- Utiliser un facteur d'élargissement de 2
- Assimiler l'intervalle ainsi obtenu à une fraction du mesurande comprise entre 95 et 100%
- Si nécessaire, préciser davantage cette fraction



## Erreur et Incertitude



## 16. Annexe 2, Exemple H1 (Annexe H du Guide d'expression de l'incertitude)

# Annexe H

## Exemples

Cette annexe donne six exemples, H. 1 à H.6, traités d'une manière très détaillée afin d'illustrer les principes fondamentaux présentés dans ce *Guide* pour l'évaluation et l'expression de l'incertitude de mesure. Avec les exemples donnés dans le corps principal du document et dans certaines autres annexes, ils devraient permettre aux utilisateurs de ce *Guide* de mettre ces principes en application dans leur propre travail.

Comme les exemples servent d'illustrations, il a fallu les simplifier. De plus, comme ces exemples et les données numériques correspondantes ont été choisis essentiellement pour démontrer les principes de ce *Guide*, ils ne doivent pas être nécessairement interprétés comme décrivant des mesurages réels. Les valeurs numériques sont utilisées telles qu'elles sont données mais, pour limiter les erreurs d'arrondissement, on a habituellement retenu pour les calculs intermédiaires un nombre de chiffres significatifs plus élevé que ce qui est transcrit. En conséquence, le résultat final d'un calcul impliquant plusieurs grandeurs peut différer légèrement du résultat auquel on pourrait s'attendre à partir des valeurs numériques données dans le texte pour ces grandeurs.

On a signalé dans des parties précédentes de ce *Guide* que la classification des méthodes utilisées pour évaluer les composantes de l'incertitude en Type A et Type B était uniquement affaire de commodité. Cette classification n'est pas nécessaire pour la détermination de l'incertitude-type composée ou de l'incertitude élargie d'un résultat de mesure parce que toutes les composantes de l'incertitude sont traitées de la même manière, quelle que soit la façon dont elles ont été évaluées (voir 3.3.4, 5.1.2 et E.3.7). Ainsi, dans les exemples, la méthode utilisée pour évaluer une composante particulière de l'incertitude n'est pas spécifiquement identifiée par son type. Cependant, la présentation montrera clairement si une composante est obtenue par une évaluation de Type A ou par une évaluation de Type B.

### H.1 Etalonnage de calibres à bouts

Cet exemple démontre que, même pour un mesurage apparemment simple, on peut rencontrer des aspects subtils dans l'évaluation de l'incertitude.

#### H.1.1 Le problème du mesurage

La longueur d'un calibre à bouts de valeur nominale 50 mm est déterminée par comparaison avec un étalon connu, un calibre à bouts de même longueur nominale. On obtient directement la différence  $d$  de leurs longueurs par la comparaison des deux calibres à bouts :

$$d = l(1 + \alpha\theta) - l_S(1 + \alpha_S\theta_S) \quad \dots \quad (\text{H.1})$$

où

$l$  est le mesurande, c'est-à-dire la longueur à 20 °C du calibre à bouts à étalonner;

$l_S$  est la longueur de l'étalon à 20 °C telle que donnée dans son certificat d'étalonnage;

$\alpha$  et  $\alpha_S$  sont, respectivement, les coefficients de dilatation thermique du calibre à étalonner et de l'étalon;

$\theta$  et  $\theta_S$  sont, respectivement, les écarts de température par rapport à la température de référence de 20 °C du calibre et de l'étalon.

#### H.1.2 Modèle mathématique

A partir de l'équation (H.1), le mesurande est donné par

$$l = \frac{l_S(1 + \alpha_S\theta_S) + d}{(1 + \alpha\theta)} \quad \dots \quad (\text{H.2})$$

$$= l_S + d + l_S(\alpha_S\theta_S - \alpha\theta) + \dots$$

Si l'on écrit la différence de température entre le calibre à bouts à étalonner et l'étalon sous la forme  $\delta\theta = \theta - \theta_S$ ,

et la différence entre leurs coefficients de dilatation thermique  $\delta\alpha = \alpha - \alpha_S$ , l'équation (H.2) devient

$$l = f(l_S, d, \alpha_S, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) \quad \dots \quad (H.3)$$

$$= l_S + d - l_S[\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta]$$

Les différences  $\delta\theta$  et  $\delta\alpha$ , mais non point leurs incertitudes, sont estimées être nulles;  $\delta\alpha$ ,  $\alpha_S$ ,  $\delta\theta$  et  $\theta$  sont supposés être non corrélés. (Si le mesurande était exprimé en fonction des variables  $\theta$ ,  $\theta_S$ ,  $\alpha$  et  $\alpha_S$ , il serait nécessaire d'inclure la corrélation entre  $\theta$  et  $\theta_S$ , et entre  $\alpha$  et  $\alpha_S$ .)

On déduit donc de l'équation (H.3) que l'estimation de la valeur du mesurande  $l$  peut être obtenue de l'expression simple  $l_S + \bar{d}$ , où  $l_S$  est la longueur de l'étalon à 20 °C telle que donnée dans son certificat d'étalonnage et  $d$  est estimé par  $\bar{d}$ , moyenne arithmétique de  $n = 5$  observations répétées indépendantes. L'incertitude-type composée  $u_c(l)$  de  $l$  est obtenue en appliquant l'équation (H.3), comme présenté ci-dessous.

NOTE - Dans cet exemple et dans les suivants, pour simplifier la notation, on utilise le même symbole pour une grandeur et pour son estimation.

**H.1.3 Variances contributives**

Le tableau (H.1) résume les aspects principaux de cet exemple tel qu'il est présenté dans ce paragraphe et dans les suivants.

Puisqu'on suppose que  $\delta\alpha = 0$  et  $\delta\theta = 0$ , l'application de l'équation (10) de 5.1.2 à l'équation (H.3) donne

$$u_c^2(l) = c_S^2 u^2(l_S) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_S}^2 u^2(\alpha_S) \quad \dots \quad (H.4)$$

$$+ c_\theta^2 u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta)$$

avec

$$c_S = \partial f / \partial l_S = 1 - (\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta) = 1$$

$$c_d = \partial f / \partial d = 1$$

$$c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S \delta\theta = 0$$

$$c_\theta = \partial f / \partial \theta = -l_S \delta\alpha = 0$$

$$c_{\delta\alpha} = \partial f / \partial \delta\alpha = -l_S \theta$$

$$c_{\delta\theta} = \partial f / \partial \delta\theta = -l_S \alpha_S$$

et, en conséquence

$$u_c^2(l) = u^2(l_S) + u^2(d) \quad \dots \quad (H.5) \quad (H.5)$$

$$+ l_S^2 \theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_S^2 \alpha_S^2 u^2(\delta\theta)$$

**H.1.3.1 Incertitude de l'étalonnage de l'étalon,  $u(l_S)$**

Le certificat d'étalonnage donne pour l'incertitude élargie de l'étalon  $U = 0,075 \mu\text{m}$  et précise qu'elle a été obtenue par utilisation d'un facteur d'élargissement  $k = 3$ . L'incertitude-type est alors

$$u(l_S) = (0,075 \mu\text{m})/3 = 25 \text{ nm}$$

**H.1.3.2 Incertitude de la différence mesurée entre les longueurs,  $u(d)$**

L'écart-type expérimental d'une mesure caractérisant la comparaison de  $l$  et  $l_S$  est fondé sur un ensemble de mesures; il a été déterminé à partir de la variabilité de 25 observations répétées indépendantes de la différence des longueurs entre deux calibres étalons à bouts et il a été trouvé égal à 13 nm. Dans la comparaison de cet exemple, on prend cinq observations répétées. L'incertitude-type associée à la moyenne arithmétique de ces lectures est alors (voir 4.2.4)

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = (13 \text{ nm})/\sqrt{5} = 5,8 \text{ nm}$$

Le certificat d'étalonnage du comparateur utilisé pour comparer  $l$  à  $l_S$  indique que son incertitude "due aux erreurs aléatoires" est de  $\pm 0,01 \mu\text{m}$  à un niveau de confiance de 95 pour-cent et sur la base de 6 mesurages répétés; l'incertitude-type est alors, en utilisant le facteur  $t$  pour  $\nu = 6 - 1 = 5$  degrés de liberté,  $t_{95}(5) = 2,57$  (voir annexe G, table G.2)

$$u(d_1) = (0,01 \mu\text{m})/2,57 = 3,9 \text{ nm}$$

L'incertitude du comparateur "due aux erreurs systématiques" est donnée dans le certificat comme étant égale à  $0,02 \mu\text{m}$  au "niveau trois sigmas". L'incertitude-type due à cette cause peut donc être prise égale à

$$u(d_2) = (0,02 \mu\text{m})/3 = 6,7 \text{ nm}$$

La contribution totale est obtenue par la somme des variances estimées :

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93 \text{ nm}^2$$

ou

$$u(d) = 9,7 \text{ nm}$$

**H.1.3.3 Incertitude du coefficient de dilatation thermique,  $u(\alpha_S)$**

Le coefficient de dilatation thermique du calibre étalon à bouts est donné comme étant  $\alpha_S = 11,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  avec

Tableau H.1 - Résumé des composantes de l'incertitude-type

Composante de l'incertitude-type $u(x_i)$	Source de l'incertitude	Valeur de l'incertitude-type $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) \equiv  c_i  u(x_i)$ (nm)	Nombre de degrés de liberté
$u(l_S)$	Etalonnage du calibre étalon	25 nm	1	25	18
$u(d)$	Différence mesurée entre calibres	9,7 nm	1	9,7	25,6
$u(\bar{d})$	observations répétées	5,8 nm			24
$u(d_1)$	effets aléatoires du comparateur	3,9 nm			5
$u(d_2)$	effets systématiques du comparateur	6,7 nm			8
$u(\alpha_S)$	Coefficient de dilatation thermique du calibre étalon	$1,2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	
$u(\theta)$	Température du banc d'essai	0,41 $^\circ\text{C}$	0	0	
$u(\bar{\theta})$	température moyenne du banc	0,2 $^\circ\text{C}$			
$u(\Delta)$	variation cyclique de température de la salle	0,35 $^\circ\text{C}$			
$u(\delta\alpha)$	Différence entre les coefficients de dilatation des calibres	$0,58 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$-l_S \theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Différence entre les températures des calibres	0,029 $^\circ\text{C}$	$-l_S \alpha_S$	16,6	2
				$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1002 \text{ nm}^2$	
				$u_c(l) = 32 \text{ nm}$	
				$\nu_{\text{eff}}(l) = 16$	

une incertitude représentée par une loi rectangulaire de limites  $\pm 2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . L'incertitude-type est alors [voir équation (7) de 4.3.7]

$$u(\alpha_S) = (2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 1,2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Puisque  $c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S \delta\theta = 0$  comme indiqué en H.1.3, cette incertitude n'a aucune contribution, au premier ordre, pour l'incertitude de  $l$ . Elle fournit cependant une contribution au second ordre qui est évaluée en H.1.7.

#### H.1.3.4 Incertitude de l'écart de température du calibre à bouts, $u(\theta)$

La température du banc d'essai est indiquée comme étant  $(19,9 \pm 0,5) \text{ } ^\circ\text{C}$ ; la température au moment des

observations individuelles n'a pas été enregistrée. Le décalage maximal donné  $\Delta = 0,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ , est censé représenter l'amplitude d'une variation approximativement cyclique de la température dans un système thermostaté et non pas l'incertitude de la température moyenne. La valeur de l'écart moyen de température

$$\bar{\theta} = 19,9 \text{ } ^\circ\text{C} - 20 \text{ } ^\circ\text{C} = -0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

est indiquée comme ayant elle-même une incertitude-type due à l'incertitude sur la température moyenne du banc d'essai de

$$u(\bar{\theta}) = 0,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

alors que la variation cyclique en fonction du temps

produit une loi de température en forme de U (arcsinus) dont l'incertitude-type est

$$u(\Delta) = (0,5 \text{ °C})/\sqrt{2} = 0,35 \text{ °C}$$

L'écart de température  $\theta$  peut être pris égal à  $\bar{\theta}$ , et l'incertitude-type de  $\theta$  est obtenue à partir de

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0,165 \text{ °C}^2$$

ce qui donne

$$u(\theta) = 0,41 \text{ °C}$$

Puisque  $c_\theta = \partial f / \partial \theta = -l_s \delta \alpha = 0$  comme indiqué en H.1.3, cette incertitude ne contribue pas, elle non plus, à l'incertitude de  $l$  au premier ordre; mais elle fournit une contribution au second ordre qui est évaluée en H.1.7.

### H.1.3.5 Incertitude de la différence des coefficients de dilatation, $u(\delta\alpha)$

Les limites estimées sur la variabilité de  $\delta\alpha$  sont  $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$  avec, pour  $\delta\alpha$ , la même probabilité d'avoir n'importe quelle valeur entre ces limites. L'incertitude-type est

$$u(\delta\alpha) = (1 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1})/\sqrt{3} = 0,58 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$$

### H.1.3.6 Incertitude de la différence entre les températures des calibres, $u(\delta\theta)$

L'étalon et le calibre en essai sont supposés être à la même température, mais la différence de température peut se situer avec une probabilité égale à n'importe quel endroit dans l'intervalle estimé de  $-0,05 \text{ °C}$  à  $+0,05 \text{ °C}$ . L'incertitude-type est

$$u(\delta\theta) = (0,05 \text{ °C})/\sqrt{3} = 0,029 \text{ °C}$$

### H.1.4 Incertitude-type composée

L'incertitude-type composée  $u_c(l)$  est calculée à partir de l'équation (H.5). Les termes individuels sont rassemblés et portés dans l'expression pour obtenir

$$u_c^2(l) = (25 \text{ nm})^2 + (9,7 \text{ nm})^2 \dots \text{ (H.6a)}$$

$$+ (0,05 \text{ m})^2 (-0,1 \text{ °C})^2 (0,58 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1})^2$$

$$+ (0,05 \text{ m})^2 (11,5 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1})^2 (0,029 \text{ °C})^2$$

$$= (25 \text{ nm})^2 + (9,7 \text{ nm})^2 \dots \text{ (H.6b)}$$

$$+ (2,9 \text{ nm})^2 + (16,6 \text{ nm})^2$$

$$= 1002 \text{ nm}^2$$

ou

$$u_c(l) = 32 \text{ nm} \dots \text{ (H.6c)}$$

La composante dominante de l'incertitude est clairement celle de l'étalon  $u(l_s) = 25 \text{ nm}$ .

### H.1.5 Résultat final

Le certificat d'étalonnage pour le calibre étalon à bouts donne  $l_s = 50,000\ 623 \text{ mm}$  comme longueur à  $20 \text{ °C}$ . La moyenne arithmétique  $\bar{d}$  des cinq observations répétées de la différence sur les longueurs entre le calibre inconnu et le calibre étalon est de  $215 \text{ nm}$ . Donc, puisque  $l = l_s + \bar{d}$  (voir H.1.2), la longueur  $l$  du calibre inconnu à  $20 \text{ °C}$  est  $50,000\ 838 \text{ mm}$ . En accord avec 7.2.2, le résultat final du mesurage peut être énoncé sous la forme :

$l = 50,000\ 838 \text{ mm}$  avec une incertitude-type composée  $u_c = 32 \text{ nm}$ . L'incertitude-type composée relative correspondante est  $u_c/l = 6,4 \times 10^{-7}$ .

### H.1.6 Incertitude élargie

Supposons qu'on recherche une incertitude élargie  $U_{99} = k_{99} u_c(l)$  qui fournisse un intervalle correspondant à un niveau de confiance de 99 pour-cent environ. La procédure à utiliser est celle qui est résumée en G.6.4, et le nombre de degrés de liberté nécessaire est indiqué dans le tableau H.1. On obtient cela comme suit :

- 1) *Incertitude de l'étalonnage de l'étalon,  $u(l_s)$*  [H.1.3.1]. Le certificat d'étalonnage spécifie que le nombre effectif de degrés de liberté de l'incertitude-type composée qui a permis d'obtenir l'incertitude élargie indiquée est  $v_{\text{eff}}(l_s) = 18$ .
- 2) *Incertitude de la différence des longueurs mesurées,  $u(d)$*  [H.1.3.2]. Bien que  $\bar{d}$  ait été obtenu à partir de cinq observations répétées, mais parce que  $u(\bar{d})$  a été obtenu à partir d'un écart-type expérimental fondé sur un ensemble de données résultant de 25 observations, le nombre de degrés de liberté de  $u(\bar{d})$  est  $v(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$  (voir H.3.6, note). Le nombre de degrés de liberté de  $u(d_1)$ , incertitude due aux effets aléatoires sur le comparateur, est  $v(d_1) = 6 - 1 = 5$  parce que  $d_1$  a été obtenu à partir de 6 mesurages répétés. L'incertitude de  $\pm 0,02 \text{ }\mu\text{m}$  pour les effets systématiques sur le comparateur peut être supposée fiable à 25 pour-cent, et il en résulte que le nombre de degrés de liberté à partir de l'équation (G.3) de G.4.2 est  $v(d_2) = 8$  (voir l'exemple de G.4.2). Le nombre

effectif de degrés de liberté de  $u(d)$ ,  $v_{\text{eff}}(d)$ , est alors obtenu à partir de l'équation (G.2b) de G.4.1 :

$$v_{\text{eff}}(d) = \frac{[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2}{\frac{u^4(\bar{d})}{v(\bar{d})} + \frac{u^4(d_1)}{v(d_1)} + \frac{u^4(d_2)}{v(d_2)}}$$

$$= \frac{(9,7 \text{ nm})^4}{\frac{(5,8 \text{ nm})^4}{24} + \frac{(3,9 \text{ nm})^4}{5} + \frac{(6,7 \text{ nm})^4}{8}} = 25,6$$

- 3) *Incertaince de la différence des coefficients de dilatation,  $u(\delta\alpha)$*  [H.1.3.5]. Les limites estimées de  $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  sur la variabilité de  $\delta\alpha$  sont jugées être fiables à 10 pour-cent. Cela donne, à partir de l'équation (G.3) de G.4.2,  $v(\delta\alpha) = 50$ .
- 4) *Incertaince de la différence entre les températures des calibres,  $u(\delta\theta)$*  [H.1.3.6]. L'intervalle estimé de  $-0,05 \text{ }^\circ\text{C}$  à  $+0,05 \text{ }^\circ\text{C}$  pour la différence de température  $\delta\theta$  est jugé fiable seulement à 50 pour-cent, ce qui donne, à partir de l'équation (G.3) de G.4.2,  $v(\delta\theta) = 2$ .

Le calcul de  $v_{\text{eff}}(l)$  à partir de l'équation (G.2b) de G.4.1 s'effectue exactement de la même façon que pour le calcul de  $v_{\text{eff}}(d)$  en 2) ci-dessus. Donc, à partir des équations (H.6b) et (H.6c) et des valeurs pour  $v$  données de 1) à 4),

$$v_{\text{eff}}(l) = \frac{(32 \text{ nm})^4}{\frac{(25 \text{ nm})^4}{18} + \frac{(9,7 \text{ nm})^4}{25,6} + \frac{(2,9 \text{ nm})^4}{50} + \frac{(16,6 \text{ nm})^4}{2}}$$

$$= 16,7$$

Pour obtenir l'incertitude élargie exigée, on arrondit tout d'abord cette valeur au nombre entier immédiatement inférieur  $v_{\text{eff}}(l) = 16$ . Il en résulte alors, à partir de la table G.2 de l'annexe G, que  $t_{99}(16) = 2,92$  et donc  $U_{99} = t_{99}(16)u_c(l) = 2,92 \times (32 \text{ nm}) = 93 \text{ nm}$ . Selon 7.2.4,

le résultat final du mesurage peut être énoncé comme :

$l = (50,000\,838 \pm 0,000\,093) \text{ mm}$ , où le nombre après le symbole  $\pm$  est la valeur numérique d'une incertitude élargie  $U = ku_c$ , avec  $U$  déterminé à partir d'une incertitude-type composée  $u_c = 32 \text{ nm}$  et d'un facteur d'élargissement  $k = 2,92$  sur la base de la loi de  $t$  pour  $v = 16$  degrés de liberté et où cette incertitude définit un intervalle estimé avoir un niveau de confiance de 99 pour-cent. L'incertitude élargie relative correspondante est  $U/l = 1,9 \times 10^{-6}$ .

### H.1.7 Termes de deuxième ordre

La note de 5.1.2 précise que l'équation (10), utilisée dans cet exemple pour obtenir l'incertitude-type composée  $u_c(l)$ , doit être complétée lorsque la non-linéarité de la fonction  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$  est suffisamment significative pour ne pas pouvoir négliger les termes de degré plus élevé dans le développement en série de Taylor. C'est le cas dans cet exemple et il en résulte que l'évaluation de  $u_c(l)$  présentée jusqu'à maintenant n'est pas complète. En appliquant l'expression donnée en note de 5.1.2 à l'équation (H.3), on obtient en fait deux termes du second ordre, non négligeables, distincts, à ajouter à l'équation (H.5). Ces termes, qui proviennent du terme quadratique dans l'expression de la note, sont

$$l_S^2 u^2(\delta\alpha) u^2(\theta) + l_S^2 u^2(\alpha_S) u^2(\delta\theta)$$

mais le premier seulement de ces termes contribue significativement à  $u_c(l)$  :

$$l_S u(\delta\alpha) u(\theta) = (0,05 \text{ m}) (0,58 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) (0,41 \text{ }^\circ\text{C})$$

$$= 11,7 \text{ nm}$$

$$l_S u(\alpha_S) u(\delta\theta) = (0,05 \text{ m}) (1,2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) (0,029 \text{ }^\circ\text{C})$$

$$= 1,7 \text{ nm}$$

Les termes de deuxième ordre font croître  $u_c(l)$  de 32 nm à 34 nm.

## 17. Annexe 3, Séquences de manipulation du logiciel

# Ceq(m)Unc

by **ceqmas**

Le logiciel de calcul automatique de l'incertitude-type composée.

The software for automatic computation of standard composed uncertainty of measurement.

[www.ceqmas.com](http://www.ceqmas.com)

# 1.- écrire la Relation Fonctionnelle Analytique

## 1.- write the Analytical Functional Relationship

Microsoft Excel - Ceq(m)Unc, Essai de traction

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ? Adobe PDF

G13 =Détails des Calculs!E25+G20

**Relation fonctionnelle :  $Y^2 = f^2(X_i) = g(X_i)$**

$$Re^2 = [ (F / b / t \cdot (1 - \alpha \cdot \theta) + Et \cdot \Delta A / (1 - Et/E)) \cdot (1 + \dot{\omega} \cdot \Delta d \varepsilon / dt) ]^2$$

Y	Mesurande	Symbole	Unité
	Contrainte sous allongement rémanent de 0.20 %	Re	N/mm <sup>2</sup>
X <sub>i</sub>	Grandeur d'entrée	Symbole	$\Delta^2 g / \Delta X_i^2$
X <sub>1</sub>	Force	F	6.38E-04
X <sub>2</sub>	Largeur de l'éprouvette	b	2.24E+02
X <sub>3</sub>	Epaisseur de l'éprouvette	t	1.15E+04
X <sub>4</sub>	Ecart de température de l'essai par rapport à 20°C	θ	6.46E-01
X <sub>5</sub>	Module d'élasticité	E	1.38E-08

NUM

Prêt

démarrer

Microsoft Excel - Ceq... Ceq(m)Unc - Microsof...

00:12

# 2.- écrire la Relation Fonctionnelle Numérique

## 2.- write the Numerical Functional Relationship

Microsoft Excel - Ceq(m)Unc, Essai de traction

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ? Adobe PDF

Tapez une question

E20 =PUISSANCE(((E10/E11/E12\*(1-E17\*E13)+(Ecroissage!\$I\$12\*E19/100)/(1-Ecroissage!\$I\$12/E14))\*(1+E18\*E15))-Y!\$D\$20);2)

Relation fonctionnelle :  $Y^2 = F(X_i) = g(X_i)$

$Re^2 = [(F/b/t \cdot (1 - \alpha \cdot \theta) + Et \cdot \Delta A / (1 - Et/E)) \cdot (1 + \dot{\omega} \cdot \Delta dc/dt)]^2$

$\alpha$  : généralement +1, mais modifiable de façon à examiner la sensibilité de l'estimation de la dérivée. Une valeur rouge signifie une dérivée négative.

Y	Mesurande	Symbole	Unité							$\Delta^2 g / \Delta X_i^2$	$\Delta^2 g / \Delta X_i^2$	$\Delta^2 g / \Delta X_i^2$	$\Delta^2 g / \Delta X_i^2$
X <sub>1</sub>	Force	F	6.38E-04	10 640	N	3.27E+01	1	3.41E-01	0	10 640	10 640	10 640	
X <sub>2</sub>	Largeur de l'éprouvette	b	2.24E+02	20.00	mm	3.00E-02	1	8.12E-02	0	20	20	20	
X <sub>3</sub>	Épaisseur de l'éprouvette	t	1.15E+04	2.80	mm	2.00E-02	1	1.84E+00	0	3	3	3	
X <sub>4</sub>	Ecart de température de l'essai par rapport à 20°C	θ	6.46E-01	0	°C	1.41E+00	1	6.46E-01	0	0	0	0	
X <sub>5</sub>	Module d'élasticité	E	1.38E-08	163 000	N/mm <sup>2</sup>	1.63E+02	1	1.07E-05	0	163 000	163 000	163 000	
X <sub>6</sub>	Ecart de la vitesse de déformation vs. 5.00E-04	Δdc/dt	1.22E+06	0.00E+00	1/s	2.50E-05	1	3.81E-04	0	0	0	0	
X <sub>7</sub>	Coefficient d'écroissage	n	0.00E+00	0.231	1	1.00E-12	1	0.00E+00	0	0	0	0	
X <sub>8</sub>	Sensibilité à la température	α	0.00E+00	0.003	/°C	2.99E-04	1	0.00E+00	0	0	0	0	
X <sub>9</sub>	Sensibilité à la vitesse de déformation	ω	0.00E+00	34	s	3.38E+01	1	0.00E+00	0	34	34	34	
X <sub>10</sub>	Ecart sur allongement	ΔAgt	1.07E+05	0.100	%	1.06E-03	1	6.01E-02	0	0	0	0	
		Y <sup>2</sup> =	190	5.34E+02	u(x <sub>i</sub> ) <sup>b</sup>	1.00E-12	Σ <sub>1</sub>	2.9697E+00	0	5.34E+02	5.34E+02	5.34E+02	
							Σ <sub>1</sub> +Σ <sub>2</sub>	2.9777E+00	Δx	Δy	x+Δ,y+Δ	x+Δ,y	x,y+Δ
	Résultat du mesurage	Symbol	Valeur	Unité				F	0	0	10 640	10 640	10 640
	Contrainte sous allongement rémanent de 0.20 %	Re	213	N/mm <sup>2</sup>				b	0	0	20	20	20
	Incertitude-type composée	u <sub>c</sub>	2	N/mm <sup>2</sup>				t	0	0	3	3	3
	Incertitude-type composée relative	u <sub>c</sub> / I	8 097	ppm				θ	0	0	0	0	0
	Facteur d'élargissement	k	2.00					E	0	0	163 000	163 000	163 000
	Incertitude élargie	U	3	N/mm <sup>2</sup>				Δdc/dt	0	0	0	0	0
	Incertitude élargie relative	U / I	16 195	ppm				n	0	0	0	0	0
								α	0	0	0	0	0

deux macros.

# 3.- activer les fonctions dérivées (macro)

## 3.- activate the derivative functions (macro)

The screenshot shows two overlapping Excel windows. The top window displays a spreadsheet with columns A through H and rows 1 through 11. The bottom window displays a spreadsheet with columns C through L and rows 15 through 27. A blue lightning bolt points to the cell at row 27, column G, which contains the text "es deux macros".

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
15	$\Delta\epsilon/dt$	1.22E+06	0.00E+00	1/s	2.50E-05	1	3.81E-04		0	
16	n	0.00E+00	0.231	1	1.00E-12	1	0.00E+00		0	
17	$\alpha$	0.00E+00	0.003	/°C	2.99E-04	1	0.00E+00		0	
18	$\omega$	0.00E+00	34	s	3.38E+01	1	0.00E+00		0	
19	$\Delta A_{gt}$	1.07E+05	0.100	%	1.06E-03	1	6.01E-02		0	
20	$Y^2 =$	190	5.34E+02	$u(x_i)^{lb}$	1.00E-12	$\Sigma_1$	2.9697E+00		0	5.34
21						$\Sigma_1 + \Sigma_2$	2.9697E+00	$\Delta x$	$\Delta y$	$x + \Delta,$
22	Symbole	Valeur	Unité				F	0	0	1
23	Re	213	N/mm <sup>2</sup>				b	0	0	
24	$u_c$	2	N/mm <sup>2</sup>				t	0	0	
25	$u_c / l$	8 087	ppm				$\theta$	0	0	
26	k	2.00					E	0	0	16
27	U	3	N/mm <sup>2</sup>				$\Delta\epsilon/dt$	0	0	

# 4.- définir les Incertitudes Type Individuelles

## 4.- define the Individual Standard Uncertainties

	A	B	C	D	E
1	$X_i$	Symbole	$X_{i(...)}$	Source de l'incertitude	$u(x_i)$
2			1	Erreur de justesse (incertitude-type)	27
3			2	Erreur de répétabilité (incertitude-type)	13
4			3	Erreur du zéro (incertitude-type)	3
5			4	Erreur de résolution relative (incertitude-type)	13
6			5		0
7	$X_1$	<b>F</b>	$\Sigma$	<b>Force</b>	33
8			1	Tolérance-type d'usinage selon Tableau B.2 de EN10002-1:20	0.000
9			2	Tolérance-type d'usinage fixée à :	0.030
10			3		
11			4		
12			5		
13	$X_2$	<b>b</b>	$\Sigma$	<b>Largeur de l'éprouvette</b>	0.030
14			1	Incertitude-type de l'épaisseur	0.020
15			2		

# 5.- définir les Valeurs des Variables

# 5.- define the Values of the Variables

Microsoft Excel - Ceq(m)Unc, Essai de traction

Echier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ? Adobe PDF

Tapez une question

150% Arial 8

G27 Formule enregistrée si vous revenez à cette case après l'exécution des deux macros.

Y	Mesurande	Symbole	Unité			
	Contrainte sous allongement rémanent de 0.20 %	Re	N/mm <sup>2</sup>			
X <sub>i</sub>	Grandeur d'entrée	Symbole	$\Delta^2g/\Delta X_i^2$	x <sub>i</sub>	Unité	u(x <sub>i</sub> )
X <sub>1</sub>	Force	F	6.38E-04	10 640	N	3.27E+01
X <sub>2</sub>	Largeur de l'éprouvette	b	2.24E+02	20.00	mm	3.00E-02
X <sub>3</sub>	Epaisseur de l'éprouvette	t	1.15E+04	2.80	mm	2.00E-02
X <sub>4</sub>	Ecart de température de l'essai par rapport à 20°C	θ	6.46E-01	0	°C	1.41E+00
X <sub>5</sub>	Module d'élasticité	E	1.38E-08	163 000	N/mm <sup>2</sup>	1.63E+02
X <sub>6</sub>	Ecart de la vitesse de déformation vs. 5.00E-04	Δdε/dt	1.22E+06	0.00E+00	1/s	2.50E-05
X <sub>7</sub>	Coefficient d'écrouissage	n	0.00E+00	0.231	1	1.00E-12
X <sub>8</sub>	Sensibilité à la température	α	0.00E+00	0.003	/°C	2.99E-04
X <sub>9</sub>	Sensibilité à la vitesse de déformation	ω	0.00E+00	34	s	3.38E+01
X <sub>10</sub>	Ecart sur allongement	ΔAgt	1.07E+05	0.100	%	1.06E-03
		Y <sup>2</sup> =	190	5.34E+02	u(x <sub>i</sub> ) <sup>1b</sup>	1.00E-12
	Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité		Σ <sub>1</sub> +

l' estimation de la dérivée. Une valeur rouge signifie une dérivée négative

# 6.- lire l'Incertitude Type Composée

## 6.- read the Standard Uncertainty

Microsoft Excel - Ceq(m)Unc, Essai de traction

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ? Adobe PDF

Tapez une question

150% Arial 10

Repondre en indiquant des modifications... Terminer la révision...

E20 =PUISSANCE(((E10/E11/E12\*(1-E17\*E13)+(Ecrouissage!\$12\*E19/100/(1-Ecrouissage!\$12/E14))\*(1+E18\*E15))-Y!\$D\$20);2)

	A	B	C	D	E	F	G
14	X <sub>5</sub>	Module d'élasticité	E	1.38E-10	163 000	N/mm <sup>2</sup>	1.63E+02
15	X <sub>6</sub>	Ecart de la vitesse de déformation vs. 5.00E-04	Δdε/dt	1.22E+04	0.00E+00	1/s	2.50E-05
16	X <sub>7</sub>	Coefficient d'écrouissage	n	0.00E+00	0.231	1	1.00E-12
17	X <sub>8</sub>	Sensibilité à la température	α	0.00E+00	0.003	/°C	2.99E-04
18	X <sub>9</sub>	Sensibilité à la vitesse de déformation	ω	0.00E+00	34	s	3.38E+01
19	X <sub>10</sub>	Ecart sur allongement	ΔAgt	1.07E+05	0.010	%	1.06E-03
20			Y <sup>2</sup> =	190	5.34E+00	u(x <sub>i</sub> ) <sup>lb</sup>	1.00E-12
21							Σ <sub>1</sub> +
22		Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité		
23		Contrainte sous allongement rémanent de 0.20 %	Re	192	N/mm <sup>2</sup>		
24		Incertitude-type composée	u <sub>c</sub>	2	N/mm <sup>2</sup>		
25		Incertitude-type composée relative	u <sub>c</sub> / l	8 960	ppm		
26		Facteur d'élargissement	k	2.00			
27		Incertitude élargie	U	3	N/mm <sup>2</sup>		es deux macros.
28		Incertitude élargie relative	U / l	17 921	ppm		
29							
30			soit				
31		Re	=	192	±	3	N/mm <sup>2</sup>
32							

Prêt NUM

démarrer Microsoft Excel - Ceq... Ceq(m)Unc - Microsof... 00:21

# 7.- estimer les Effets du 2<sup>nd</sup> Ordre

## 7.- appraise 2<sup>nd</sup> Order Effects

The screenshot displays two overlapping Excel windows. The background window shows a table with columns F through M and rows 1 through 31. The foreground window shows a table with columns U through Z and rows 18 through 31. A blue callout bubble with the text "OK?" is positioned over the foreground table.

	F	G	H	I	J	K	L	M
1			1	0.00E+00		0	163 000	163 000
2			1	2.47E-02		0	0	0
3			1	0.00E+00		0	0	0
4			1	2.78E-02		0	0	0
5			1	0.00E+00		0	33	33
6			1	1.64E+01		0	0	0
7			$\Sigma_1$	1.9257E+01		0	3.55E+04	3.55E+04
8			$\Sigma_1+\Sigma_2$	1.9293E+01	$\Delta x$	$\Delta y$	$x+\Delta, y+\Delta$	$x+\Delta, y$
9				F	0	0	10 640	10 640
10				b	0	0	20	20
11				t	0	0	3	3
12				$\theta$	0	0	3	3
13				E	0	0	163 000	163 000

	U	V	W	X	Y	Z
18	0.00E+00	0.00E+00	2.47E-02	0.00E+00	0.00E+00	
19	2.84E-04	4.14E-05	1.14E-05	0.00E+00	1.28E-05	0.00E+00
20						
21	$u(x_j)$		$\Sigma_2 =$			
22	0.00E+00		3.55E-02			
23	0.00E+00					
24	0.00E+00		Check pour différentes			
25	0.00E+00		Valeurs d'Incrément			
26	0.00E+00		$\Delta =$			
27	0.00E+00		0.5	3.55E-02		
28	0.00E+00		2.0	3.55E-02		
29	0.00E+00		1.0	3.55E-02		
30	0.00E+00					
31	0.00E+00					

# 8.- écrire les commentaires

## 8.- write the comments

**Microsoft Excel - Cequnc tensile**

Echier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ? Adobe PDF

Tapez une question

100% Arial 10

Anglais -> Néerlandais

B30

**Calcul de l'incertitude sur la contrainte correspondant à un allongement rémanent donné**

Le calcul tient compte de différents paramètres affectant la valeur d'une contrainte dérivée d'un essai de traction et correspondant à un allongement rémanent donné.

Tout d'abord, la valeur de la contrainte est affectée des incertitudes sur la force (précision de la machine) et sur la section de l'éprouvette (largeur et épaisseur d'une éprouvette prismatique de type ISO 20\*80) :

- la précision sur la force est quantifiée en fonction de la classe de la machine selon le tableau 2 de la norme ISO 7500-1:1999. Sont prises en compte les tolérances de justesse, de répétabilité, du zéro et de résolution relative. Les tolérances sont converties en écart-type selon la loi normale (k=2) et exprimées en unité de force (N) à partir de la valeur nominale de la force.
- la précision sur la largeur est quantifiée en fonction soit du tableau B2 de la norme EN 10002-1:2001 (tolérances permettant de faire intervenir la largeur nominale de l'éprouvette dans les calculs, range de .210 mm et loi uniforme), soit d'un essai interlaboratoire (incertitude-type de répétabilité de 0.020 mm). La pondération entre ces deux options se fait par le choix des coefficients dans les colonnes à leur droite.
- La précision sur l'épaisseur de l'éprouvette est ajustée de manière à coïncider avec les tolérances respectives pour des tôles
  - . laminées à chaud,
  - . laminées à froid,
  - . revêtues par galvanisation,
  - . revêtues par électrozingage.

Une tolérance type déduite d'un essai interlaboratoire est fournie pour une tôle laminée à froid d'épaisseur de 3 mm, soit un écart-type de répétabilité égal à 0.010 mm.

Les effets de la température et de la vitesse sont pris en compte en fonction d'écart par rapport soit à une température de référence de 20 °C soit à une vitesse de déformation de  $5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  (valeur encadrée par les limites mentionnées dans la norme EN 10002-1 pour la mesure de la limite inférieure d'écoulement). Seuls les effets métallurgiques de la température et de la vitesse de déformation sont pris en compte (hypothèse de non incidence sur les performances de mesure de la machine). Le modèle d'activation thermique de DAHL est utilisé pour quantifier les effets de température et de vitesse de déformation. Ce modèle est ici supposé connu et n'est pas décrit dans ce cadre. Il est tabulé à la feuille "Dahl" et paramétrisé pour différents aciers. Les valeurs applicables à l'acier considéré sont directement appliquées par le tableur. Le modèles est utilisé pour dériver les coefficients de sensibilité à la température ( de type  $1 + \alpha \cdot \Delta T$  ) et à la vitesse de déformation ( de type  $1 + \Delta ds/dt$  ) dans la gamme de variation concernée par le calcul en cours. Les coefficients de sensibilité sont directement pris en compte par la feuille de calcul. Le modèle laisse la possibilité de pondérer la sensibilité prédite par le modèle de DAHL au moyen des facteurs inscrits en bleu dans les deux cellules en regard des cases concernées. L'incertitude

Prêt

Démarrer Cequnc - Microsoft Word Microsoft Excel - Cequ...

12:22

# 9.- consulter la synthèse des résultats

## 9.- consult synthesis of reports

Microsoft Excel - Ceq(m)Unc, Essai de traction

Y	Mesurande	Symbole	Unité	Variances relatives
	Contrainte sous allongement rémanent de 0.20 %	Re	N/mm <sup>2</sup>	
X <sub>i</sub>	Grandeur d'entrée			
X <sub>1</sub>	Force	F	N	11%
X <sub>2</sub>	Largeur de l'éprouvette	b	mm	3%
X <sub>3</sub>	Épaisseur de l'éprouvette	t	mm	62%
X <sub>4</sub>	Écart de température de l'essai par rapport à 20°C	θ	°C	22%
X <sub>5</sub>	Module d'élasticité	E	N/mm <sup>2</sup>	0%
X <sub>6</sub>	Écart de la vitesse de déformation vs. 5.00E-04	Δde/dt	1/s	0%
X <sub>7</sub>	Coefficient d'écroutissage	n	1	0%
X <sub>8</sub>	Sensibilité à la température	α	/°C	0%
X <sub>9</sub>	Sensibilité à la vitesse de déformation	ω	s	0%
X <sub>10</sub>	Écart sur allongement	ΔAgt	%	2%
	Résultat du mesurage	Symbole	Valeur	Unité
	Contrainte sous allongement rémanent de 0.20 %	Re	192	N/mm <sup>2</sup>
	Incertitude-type composée	uc	1.7	N/mm <sup>2</sup>
	Variance d'incertitude	u <sup>2c</sup>	3.0	N/mm <sup>2</sup>
	Facteur d'élargissement	k	2.00	0
	Incertitude élargie	U	3.5	N/mm <sup>2</sup>

Composition de la variance d'incertitude

Composition de la variance d'incertitude

Prêt NUM 08:07

# Spécifications

## Specifications

- jusqu'à 10 variables non corrélées,
- up to 10 non correlated variables,
- calculs aux 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordres,
- computations to 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> orders,
- dérivées par différences finies centrées,
- derivatives by finite centred differences,
- contrôle incrémental,
- incremental control,
- compatibilité avec guides ISO & EAC,
- full compatibility with ISO & EAC Guides,

# Applications

## Applications

- longueur, surface, volume,
- length, area, volume,
- masse, force, contrainte,
- mass, load, stress,
- température, pyrométrie, thermométrie,
- temperature, pyrometers, thermometers,
- gravimétrie,
- gravimetric applications,
- toute relation fonctionnelle,
- any functional relationship.